I) Fonction réciproque

1) Définition

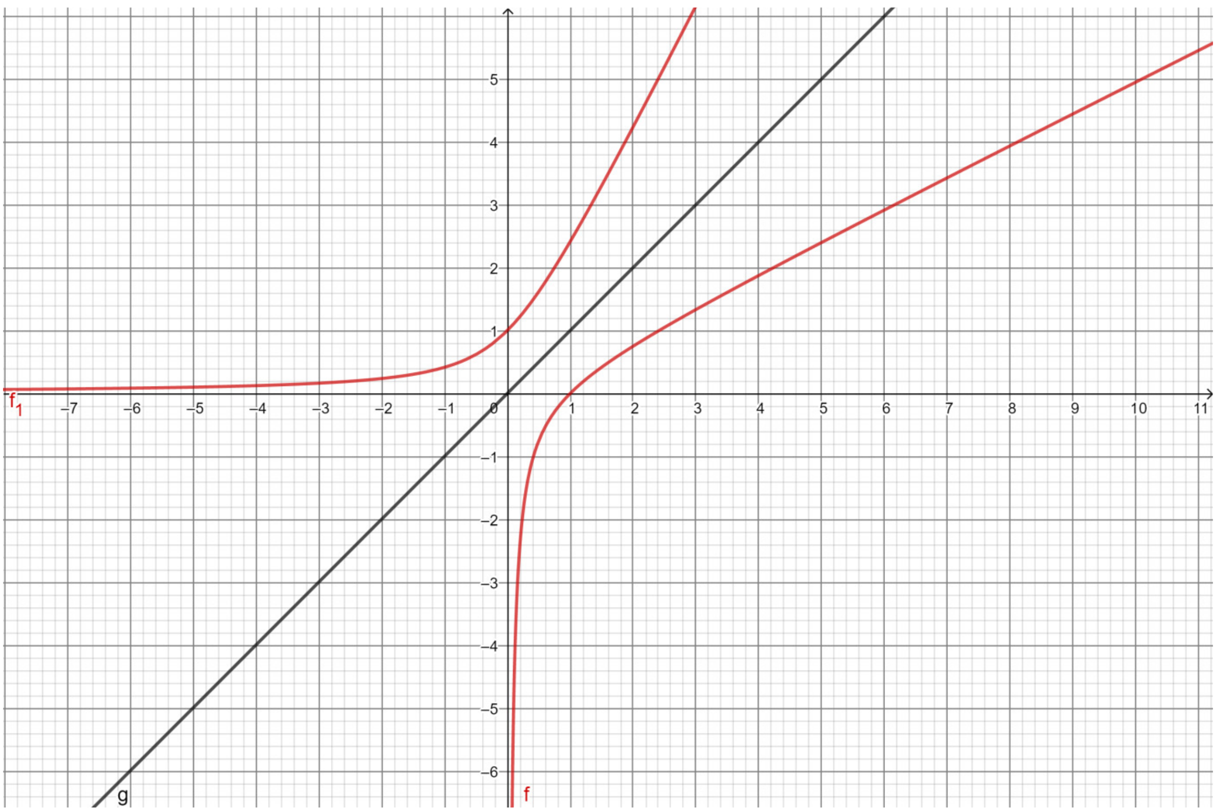
Si f est une fonction **strictement monotone** sur un intervalle I alors on dit que f est une **bijection** de I sur f(I)

Théorème

f est une **bijection** de I sur J :

- chaque élément **x de I** admet une unique image y par f dans J et chaque élément y *de* J admet un unique antécédent par f dans I
- $J = f(I)$.
- $f: I \to f(I)$ d'après ce qui précède il existe une fonction appelée fonction réciproque de f sur I noté f^{-1}
- La fonction $f^{-1}: f(I) \to I$.
- $\forall\, x \in I$ *et* $\forall y \in f(I)$, $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$
- $\forall y \in f(I)\quad fof^{-1}(y) = y$ et $\forall\, x \in I\ \ f^{-1}of(x) = x$
- La fonction réciproque f^{-1}de f est **strictement monotone** sur J et elle à le même sens de variation que f
- Si de plus f est **continue** sur I alors f^{-1} est aussi **continue** sur J
- Les courbes représentatives de f et de f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la 1er bissectrice $\Delta: y = x$. $(S_{\Delta}((x, y)) = (y, x)$

Exemple :



Exercice (Activité 2 page 66)

Point méthode

Pour expliciter $f^{-1}(x)$

Par exemple $f(x) = \frac{x^2-1}{2x}$ $I =]0, +\infty[$ et $J = IR$

On écrit $f(y) = x$ et on détermine y en fonction de x

$\dfrac{y^2-1}{2y} = x \Leftrightarrow y^2 - 1 = 2xy$

$\Leftrightarrow y^2 - 2xy - 1 = 0$ équation du 2nd degré

$\Delta' = x^2 + 1 > 0$

$y = x - \sqrt{x^2+1}$ ou $y = x + \sqrt{x^2+1}$ donc $f^{-1}(x) = x - \sqrt{x^2+1}$

Question : Justifier le choix

II) Dérivée d'une fonction réciproque

Théorème

Soit f une bijection de I sur J. soit $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$

Si f est dérivable en x_0 et $\boldsymbol{f'(x_0) \neq 0}$ alors la fonction réciproque f^{-1} de f est dérivable en y_0 et on a: $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

Remarque

Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 0$ alors f^{-1} n'est pas dérivable en y_0

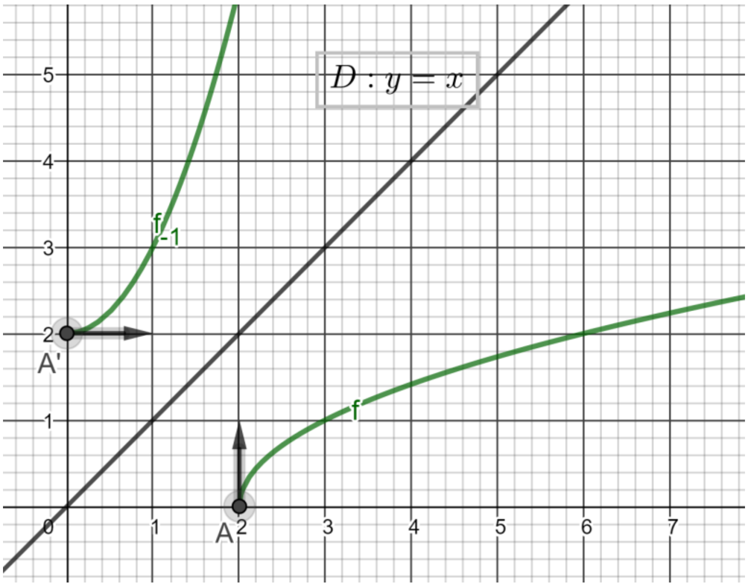
Corollaire

Soit f une bijection de I sur $J = f(I)$

Si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I alors la fonction réciproque f^{-1} de f est dérivable sur J et on a :$(f^{-1})' = \frac{1}{f' o f^{-1}}$.

<u>**Remarque importante**</u>

Dans le graphique C_f admet au point (2,0) une demi tangente verticale alors f n'est pas dérivable à droite en 2 or par symétrie la courbe de $C_{f^{-1}}$ admet au point (0,2) une demi tangente horizontale ce qui prouve que f^{-1} est dérivable a droite en 0 et $f_d^{-1\,'}(0) = 0$



III) Fonction réciproque de la fonction $x \to x^n$; $x \geq 0$ et $n > 0$

1) Définition

La fonction $x \to x^n$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur lui-même sa fonction réciproque est la fonction nommée fonction racine- nième noté $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

Par exemple la fonction réciproque de $f(x) = x^3$ est la fonction $g(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

Remarque $(\sqrt{x})^3 = x^{\frac{3}{2}}$

Exercice

Soit la fonction f définie sur $I = [1, +\infty[$ par $f(x) = (x-1)\sqrt{x-1} - 1$

1) **a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1**

   b) Interpréter graphiquement le résultat

2) **a) Etudier les variations de f sur I dresser son tableau de variation**

   b) Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera

3) **Montrer que la fonction réciproque f^{-1} de f n'est pas dérivable en -1**

4) **a) Calculer f(2) puis montrer que $(f^{-1})'(0) = \frac{2}{3}$**

   b) Ecrire une équation de la tangente à $C_{f^{-1}}$ au point d'abscisse 0

5) **Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$**

6) **construire C_f et $C_{f^{-1}}$ dans le même repère orthonormé**

EXERCICE

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé

1) **a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $f'(x) = \frac{-1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$**

   b) Dresser le tableau de variation de f et tracer C_f.

   c) Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera

2) **Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans une unique solution $]0, +\infty[$ et que $1 < \alpha < \sqrt{2}$**

3) **a) Montrer que la fonction f^{-1} réciproque de f est dérivable sur $]1, +\infty[$**

   b) Calculer $f^{-1}(\sqrt{2}\ )$ puis $(f^{-1})'(\sqrt{2}\ )$

   c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

4) **Tracer $C_{f^{-1}}$ dans le même repère**