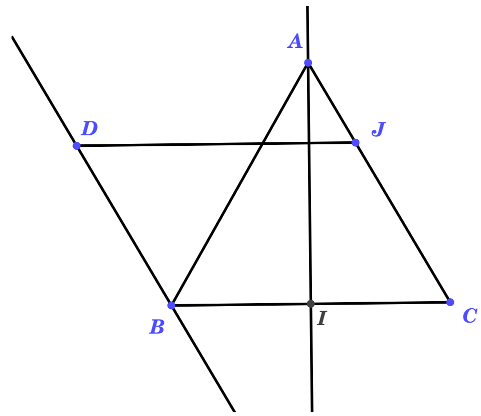
Exercice n°1

Dans le plan orienté , ABC est un triangle équilatéral tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
On désigne par I le milieu de $[BC]$, par J le barycentre de $(A,2)$ et $(C,1)$ et par D le point tel que $BCJD$ est un parallélogramme.
Soit l'isométrie $f = t_{\overrightarrow{CJ}} \circ S_{(AI)}$.



1. a) Déterminer $f(B)$ et $f(C)$.
   b) Montrer que f est une symétrie glissante.

2. a) Soit K le symétrique de J par rapport à (BC) et L le symétrique de J par rapport à I.
   Montrer que $f(K) = B$. En déduire le vecteur de f.
   b) Soit G le milieu de $[BK]$ et O le milieu de $[BJ]$.
   Déterminer $f(G)$ puis déterminer l'axe de f.

3. La droite (OG) coupe $[BC]$ en H et la droite (JH) coupe (BL) en B'.
   a) Montrer que $BC = JB'$ et $2\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$.
   b) On désigne par g le déplacement qui envoie C en J et B en B'. Montrer que g est une rotation que l'on caractérisera.

Exercice n°2

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): m^2z^2 + m^3z + 1 - im^2 = 0$ où $m \in \mathbb{C}^*$

1 a) Résoudre l'équation (E) pour $m = -1$.

b) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles $u = 1 + i$ est une solution de (E) puis déterminer l'autre solution dans chacun des cas.

2 a) Vérifier que le discriminant Δ de l'équation (E) est $\Delta = m^2\left(m^2 + 2i\right)^2$

b) Déterminer les solutions z_1 et z_2 de l'équation (E).

3 Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$. On considère les points A, B et M d'affixes respectives :

$$a = -m - \frac{i}{m}, \quad b = \frac{i}{m} \quad \text{et} \quad m.$$

On pose $z = \dfrac{m-a}{m-b}$

a) Montrer que $z = \bar{z} \Leftrightarrow arg(m) \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$ ou $arg(m) \equiv -\dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$

b) En déduire l'ensemble Γ des point $M(m)$ tels que A, B et M soient alignés

4 Soit R la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

On note $A' = R(A)$, $M' = R(M)$ et $B' = R^{-1}(M)$

a) Déterminer l'affixe a' du point A' et montrer que l'affixe du point B' est $b' = -im + \dfrac{i-1}{m}$.

b) Déterminer m' l'affixe du point M' et montrer que B est le milieu du segment $[B'M']$.

c) Soit I le milieu du segment $[AM]$ et z_I l'affixe du point I.

Calculer $\dfrac{b'-a'}{b-z_I}$.

d) En déduire que $(BI) \perp (A'B')$ et $A'B' = 2BI$

Exercice n°3

1 Soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E): 17x - 40y = 1$.

a) Montrer que si (x, y) est une solution de (E) alors $6y \equiv 84 \pmod{17}$.

b) En déduire que si (x, y) est une solution de (E) alors $y \equiv 14 \pmod{17}$.

c) Résoudre alors dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).

2 On considère dans $\mathbb{N}$ le système (S) : $\begin{cases} x \equiv a \pmod{17} \\ x \equiv b \pmod{100} \end{cases}$

a) montrer que $x_0 = 800a - 799b$ est une solution particulière de (S).

b) En déduire l'ensemble de solutions de (S).

c) Déterminer un entier naturel N tel que les restes respectifs de sa division euclidienne par 17 et 100 sont 12 et 18.

3 On se propose de déterminer les solutions dans de l'équation

$$(F): x^{17} \equiv 10 \pmod{101}$$

On donne 101 est premier. Soit x une solution de (F)

a) Montrer que $x \wedge 101 = 1$.

b) Montrer alors que $x^{800} \equiv 1 \pmod{101}$.

c) En déduire que $91x \equiv 1 \pmod{101}$.

d) Résoudre alors l'équation (F).

4 Soit n un entier naturel qui s'écrit $a1a$.

a) Montrer que $n^{17} \equiv 10 \pmod{101}$.

b) En déduire les entiers naturels formés de trois chiffres et solutions de (F).

Exercice n°4

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\,0\right]$ par : $f(x) = -\ln(1+\sin x)$.

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.

(I)

1) Dresser le tableau de variation de f.

2) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

3) a) Montrer que f admet une fonction réciproque qu'on note φ définie sur $[0\,,\,+\infty[$.

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}_\varphi$ de φ dans le même repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.

4) Montrer que φ est dérivable sur $[0\,,\,+\infty[$ et que pour tout $x>0$ on a :

$$\varphi'(x) = \frac{-1}{\sqrt{2e^x-1}}$$

(II) Soit g la fonction définie sur $]0\,,\,+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{2e^x-1}}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G_n(x) = \displaystyle\int_0^x (g(t))^n\,dt$.

1) a) Calculer $G_1(x)$ en fonction de $\varphi(x)$.

b) En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G_1(x) = -\frac{\pi}{2}$.

c) Pour tout $t>0$ on pose $k(t) = \ln\left(2-e^{-t}\right)$. Montrer que $k'(t) = g^2(t)$.

d) Calculer alors $G_2(x)$ et déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G_2(x)$.

2) a) En remarquant que pour tout $t \geq 0$, $2e^t - 1 \geq e^t$.

Montrer que pour tout $t\geq 0$ on a : $-e^{-\frac{t}{2}} \leq g(t) \leq 0$.

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a :

$$\left|G_n(x)\right| \leq \frac{2}{n}.$$

c) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} G_n(x)$.

3) a) Vérifier que pour tout $t\geq 0$ on a : $g(t) + (g(t))^3 = -2g'(t)$.

b) En déduire que pour tout $x\geq 0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a :

$$G_n(x) + G_{n+2}(x) = -\frac{2}{n}\left[(g(x))^n - (-1)^n\right]$$

4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $U_n = G_n\left(\ln\frac{5}{2}\right)$ et $V_n = (-1)^n U_{2n}$.

a Calculer U_2.

b Vérifier que : $U_{n+2} + U_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{1}{2^n} - 1\right)$.

c Déduire que : $V_{n+1} - V_n = \frac{(-1)^n(1-4^n)}{n4^n}$.

d Trouver alors $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4} - \frac{15}{32} + \ldots + \frac{(-1)^n(1-4^n)}{n4^n}\right)$.