Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de synthèse n° 2** Mathématiques	Niveau : 3 ème Math 2
Date : 04 / 06 / 2021	Prof : MEDDEB Tarek	Durée : 3 heures

Exercice n°1 (7 pts)

A- Soit g_m la fonction définie sur IR par : $g_m(x)=mx^3-(2+m)x-4$, où $m\in IR$.

On désigne par C_m sa représentation graphique dans repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que toutes les courbes C_m passent par trois points fixes qu'on précisera.

2) Montrer que, pour tout réel m, le point $I(0;-4)$ est un centre de symétrie de C_m.

3) $a/$ Ecrire une équation de la tangente T_m à C_m au point I.

$b/$ Déterminer la valeur de m pour laquelle T_m soit perpendiculaire à la droite $D: y=\frac{1}{3}x$.

Dans la suite de l'exercice, on prend $m=1$ et on note $g_1=g$.

4) $a/$ Etudier les variations de g.

$b/$ Montrer que l'équation : $g(x)=0$ admet dans $]2;3[$ une solution unique α.

$c/$ Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

B- Soit f la fonction définie sur $IR\setminus\{-1;1\}$ par : $f(x)=\frac{x^3+2}{x^2-1}$.

On désigne par C_f sa représentation graphique dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ de la feuille annexe.

1) $a/$ Montrer que, pour tout $x\in IR\setminus\{-1;1\}$, $f'(x)=\frac{x.g(x)}{(x^2-1)^2}$.

$b/$ Etablir le tableau de variation de f.

$c/$ Montrer que $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$.

2) $a/$ Montrer que la droite $\Delta: y=x$ est une asymptote de C_f.

$b/$ Etudier la position de C_f par rapport à Δ.

$c/$ On a placé le point $A(\alpha;0)$. Construire le point $B(\alpha; f(\alpha))$ puis tracer C_f.

Exercice n°2 (5 pts)

Pour tout $n\in IN$, on pose $a_n=\frac{4^{2n+1}+1}{5}$.

1) $a/$ Calculer a_0, a_1 et a_2.

$b/$ Montrer, par récurrence, que pour tout $n\in IN$, $a_n\in IN$.

2) Montrer que, pour tout $n\in IN$, $a_{n+1}=16a_n-3$.

3) On pose, pour tout $n\in IN$, $d_n=a_n\wedge a_{n+1}$.

$a/$ Montrer que, pour tout $n\in IN$, d_n divise 3.

$b/$ Montrer que, pour tout $n\in IN$, 3 divise $a_{n+1}-a_n$.

$c/$ En déduire que, pour tout $n\in IN$, a_n n'est pas divisible par 3.

$d/$ Démontrer alors que, pour tout $n\in IN$, a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

Exercice n°3 (4 pts)

Soient x et y deux entiers naturels non nuls tels que $x < y$.

On désigne par S l'ensemble des couples $(x;y)$ tels que $x \wedge y = y - x$.

1) $a/$ Calculer $363 \wedge 484$.

   $b/$ Le couple $(363;484)$ appartient-il à S ?

2) Soit n un entier naturel non nul.

   Le couple $(n;n+1)$ appartient-il à S ?

3) $a/$ Montrer que :

   $(x;y) \in S$ si, et seulement si, il existe $k \in IN^*$ tel que $x = k(y-x)$ et $y = (k+1)(y-x)$.

   $b/$ En déduire que : si $(x;y) \in S$ alors $x \vee y = k(k+1)(y-x)$.

4) Décomposer l'entier 228 en produit de facteurs premiers.

   En déduire tous les couples $(x;y)$ de S tels que $x \vee y = 228$.

Exercice n°4 (4 pts)

Un code d'accès comporte quatre lettres suivies de trois chiffres.

1) Déterminer le nombre des codes possibles.

2) Déterminer le nombre des codes :

   $a/$ Commençant par la lettre A.

   $b/$ Contenant la lettre A.

   $c/$ Contenant exactement deux fois la lettre A.

   $d/$ Contenant exactement deux fois la lettre A et une seule fois le chiffre 0.

   $e/$ Contenant quatre lettres distinctes.

   $f/$ Contenant au moins une fois la lettre A.

3) Dans cette question, on suppose que le code d'accès comporte quatre lettres et trois chiffres ordonnés d'une manière aléatoire.

   $a/$ Déterminer le nombre des codes possibles.

   $b/$ Déterminer le nombre des codes contenant exactement deux fois la lettre A et une seule fois le chiffre 0.

   $c/$ Contenant quatre lettres distinctes.

Croyez en vos rêves et ils se réaliseront peut-être. Croyez-en vous et ils se réaliseront sûrement.
(Martin Luther King)

FEUILLE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Devoir de synthèse n° 2 *(04 – 06 – 2021)*

Nom et prénom : …………………………………………………….. *Classe : 3 ème Maths 2*