Lycée Secondaire Othman Othman Chatty M'saken	Bac Blanc	A.S:2020-2021
Prof: Sami Fatahallah Ridha Bahloul	Mathématiques	27/05/2021
Classe : 4 M 1 § 2		Durée :4 heures

Exercice 1 : (4.5 points)

Sur l'écriteau d'un stand d'une fête foraine on peut lire le slogan suivant « Gratter c'est gagner » .En effet , les organisateurs de cette fête proposent le jeu suivant :

Le joueur achète un billet de 10^{dt} qui lui permettra de participer à une loterie. il gratte une case sur le billet .Il peut alors trouver l'un des chiffres 1 , 2 ou 3 puis il prend d'une corbeille contenant dix enveloppes surprises autant (le même nombre) d'enveloppe que le chiffre qu'il a trouvé.

Les billets sont conçus de telle sorte que la moitié d'entre eux portent le chiffre 1 et le tiers le chiffre 2 parmi les dix enveloppe il y a une seule qui contient un bon d'achat de 50^{dt} et deux seulement un bon d'achat de 25^{dt} , toutes les autres ne contiennent que des blagues.

On considère les évènements :

B_i : ‘' le billet gratté porte le chiffre i ‘' $i \in \{1,2,3\}$.

A : ‘' le joueur ne gagne rien à la loterie ‘'

1.
   a. Calculer chacune des probabilités suivantes : $p(A|B_1); p(A|B_2); p(A|B_3)$

   En déduire que $p(A) = \dfrac{133}{240}$.

   b. Le joueur n'a rien gagné à la loterie. Quelle est la probabilité pour qu'il ait obtenu le chiffre 3 au grattage ?
2. Soit X l'aléa numérique égal au gain algébrique du joueur . Déterminer sa loi de probabilité et calculer son espérance Mathématique E(X) . Que pensez-vous du slogan affiché sur l'écriteau du stand.
3. À la sortie de la fête, on interroge cinq personnes qui ont joué à ce même jeu . On suppose que leurs gains sont indépendants les uns des autres . quelle est la probabilité de chacun des évènements suivants :

   E : ‘' Trois parmi les personnes interrogées n'ont rien gagné à la loterie''

   F : '' La première seulement des personnes interrogées a gagné trois bons d'achat ‘'

Exercice 2: (4.5 points)

Soit p un nombre premier .

I.

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{Z}$; $a^p - a \equiv 0 \left[\text{mod } p\right]$
2. Soit $x, y \in \mathbb{Z}$. Montrer que : $x^p \equiv y^p \left[\text{mod } p\right] \Rightarrow x \equiv y \left[\text{mod } p\right]$.
3. Soit $x, y \in \mathbb{Z}$ tel que $x^p \equiv y^p \left[\text{mod } p\right]$.Montrer que $x^p \equiv y^p \left[\text{mod } p^2\right]$

   Indication : On pose $x = y + \alpha p$ et on pourra utiliser la formule du binôme de Newton.
4. Soit $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha \wedge p = 1$. Montrer que $\alpha^{p(p-1)} \equiv 1\left[\text{mod } p^2\right]$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \wedge 7 = 1 \ et \ n \wedge 13 = 1$
   - **a.** Montrer que $n^{85} \equiv n\left[\text{mod } 49\right]$

     et que $n^{85} \equiv n\left[\text{mod } 13\right]$
   - **b.** Montrer que ; pour tout $k \in \mathbb{N}^*$; $n^k \equiv n\left[\text{mod } 2\right]$ (On distinguera les deux cas n pair et n impair).
   - **c.** Montrer que 1274 divise $n^{85} - n$

II. Soit x un entier relatif tel que $x^{85} \equiv 2\left[13\right]$.

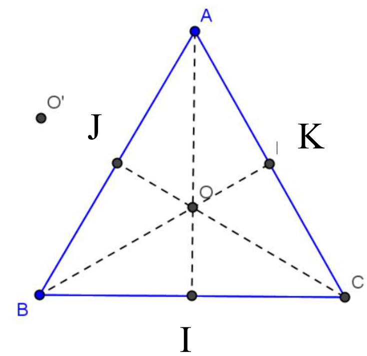
1.
   - **a.** Montrer que $x \wedge 13 = 1$.
   - **b.** Montrer que $x^{85} \equiv x\left[\text{mod } 13\right]$.
   - **c.** Déterminer la valeur de $x \in \left[60, 70\right]$.
2.
   - **a.** Montrer que $(n+1)^p - (n^p + 1) \equiv 0\left[\text{mod } p\right]$.(On pourra utiliser la question I.1).
   - **b.** Montrer que $(n+1)^p - (n^p + 1) \equiv 0\left[\text{mod } 2\right]$.
   - **c.** Déduire que $(n+1)^p - (n^p + 1) \equiv 0\left[\text{mod } 2p\right]$
3. Déterminer le reste mod 194 de $2022^{97} - 2021^{97}$

   NB : On rappelle la formule du binôme de Newton : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^k b^{n-k}$.

Exercice 3 : **(5 points)**

Dans la figure ci-contre :

- ABC est un triangle équilatéral de centre O, tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
- I , J et K sont les milieux respectifs de $[BC]$, $[AB]$ et $[AC]$.
- $O' = S_{(AB)}(O)$.



1. Montrer que BOAO’ est un losange de centre J et que $(BO') \perp (BC)$.
2.
   a. Montrer qu’il existe un seul déplacement φ vérifiant $\varphi(B) = C$ et $\varphi(O') = O$.
   b. Préciser l’angle de φ. En déduire que φ est une rotation dont on précisera le centre .
3. Soit $g = t_{\overrightarrow{CB}}\, o\, \varphi$.
   a. Vérifier que $\varphi = S_{(AI)} o\, S_{(AB)}$.
   b. En déduire que g est une rotation dont on précisera l’angle et le centre .
4. Soit ψ l’antidéplacement tel que $\psi(B) = C$ et $\psi(O') = O$.
   a. Montrer que ψ est une symétrie glissante d’axe (IJ).
   b. Déterminer $S_{(IJ)}(B)$. En déduire le vecteur $\vec{u}$ de ψ .
5. Soit Ω l’intersection de (BK) et (IJ) . On pose $h = S_{\Omega}\, o\, \psi$.
   a. Déterminer $h(J)$. En déduire h est une symétrie orthogonale.
   b. Vérifier que $S_{\Omega} = S_{(BK)}\ o\ S_{(IJ)}$. En déduire que : $h = S_{(BK)}\ o\ t_{\overrightarrow{JI}}$.
   c. Déterminer l’axe de h.

Exercice 4 : **(6 points)**

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(1+x)e^{-2x}$ et on note (C) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I.

1. Étudier les variations de *f*.

2. Tracer (C) .

II. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$; On pose $I_n=\int_0^n (1+\frac{x}{n})^n e^{-2x}\ dx$.

1.

a. Montrer que pour tout réel positif t on a : $1-t\leq\frac{1}{1+t}\leq 1$.

b. En déduire que pour tout réel positif x : $x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x$.

c. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $x-\frac{x^2}{2n}\leq n\ln(1+\frac{x}{n})\leq x$

puis que $e^{x-\frac{x^2}{2n}}\leq(1+\frac{x}{n})^n\leq e^x$.

d. Montrer alors que $\int_0^n e^{-x-\frac{x^2}{2n}}\ dx\leq I_n\leq 1-e^{-n}$.

2.

a. Étudier le sens de variation de la fonction : $x\mapsto e^{-x}+x-1$ sur $\mathbb{R}_+$.

En déduire que pour tout réel positif x : $1-x\leq e^{-x}$.

b. En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $1-\frac{x^2}{2n}\leq e^{-\frac{x^2}{2n}}$.

c. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a : $\int_0^n e^{-x-\frac{x^2}{2n}}\ dx\geq\int_0^n (e^{-x}-\frac{x^2}{2n}e^{-x})\ dx$.

d. Calculer $\int_0^n x^2e^{-x}\ dx$; en déduire que $I_n\geq 1-\frac{1}{n}+(\frac{1}{n}+\frac{n}{2}).e^{-n}$.

Montrer que la suite (I_n) est convergente et calculer sa limite.

Bon Travail et Bonne Révision