ETUDE DES FONCTIONS

I/ Plan d'étude

1/ Pour étudier une fonction on doit suivre les étapes suivantes :
Le domaine de définition « D_f »
Les limites aux bornes de « D_f »
Continuité ; dérivabilité et fonction dérivée
Tableau de variation
2/ pour tracer sa représentation graphique ($\mathcal{C}_f$) il suffit de savoir :
Les points remarquables (il existe des tangentes horizontales , intersections avec les axes , points anguleux , …) et les branches infinies

II/ équation de la tangente :

Soit f une fonction définie ; continue et dérivable en un point en x_0 .
Soit $I(x_0 ; f(x_0))$ sa représentation graphique ($\mathcal{C}_f$) admet au point I une tangente

$$\boxed{T_I : y = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)}$$

III/ point d'inflexion :

Soit f une fonction deux fois dérivables sur « D_f » si an a :

$\begin{cases} \text{« f'' » s'annule en } \alpha \\ \text{et} \\ \text{« f'' » change de signe} \end{cases}$ alors le point $J(\alpha ; f(\alpha))$ est un point d'inflexion

x	α	
f''(x)	–	+

ou

x	α	
f''(x)	+	–

IV/ ELEMENTS DE SYMETRIES :

Soit f une fonction définie ; continue sur « D_f »
1/ parité :
On dit que f est paire si et seulement si : $\begin{cases} \text{pour tout } x \in D_f , -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$
Dans ce cas sa représentation graphique « ζ_f » est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées d'où il suffit de l'étudier sur $D_f \cap IR_+$

On dit que f est impaire si et seulement si : $\begin{cases} \text{pour tout } x \in D_f , -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$
Dans ce cas sa représentation graphique « ζ_f » est symétrique par rapport à
L'origine du repère d'où il suffit de l'étudier sur $D_f \cap IR_+$
2/ périodicité : soit T un réel strictement positive
on dit que f est périodique de période T si et seulement si :
T est le plus petit rée tel que : $\begin{cases} \text{pour tout } x \in D_f , (x + T) \in D_f \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$
Dans ce cas il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur « T »

3/ Axe de symétrie :
Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, une droite $\Delta : x = a$ est un axe de Symétrie pour la courbe ($\mathcal{C}_f$) si et seulement si : $\begin{cases} \text{pour tout } x \in D_f , (2a - x) \in D_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$

4/ centre de symétrie :

Dans un repère orthonormée $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,)$, un point $I(a\,;b)$ est un centre de Symétrie pour la courbe (ζ_f) si et seulement si : $\begin{cases} \text{pour tout } x \in D_f,\ (2a - x) \in D_f \\ f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$

V/BRANCHES INFINIES :

La droite $\Delta : y = a$ est une asymptote horizontale à la courbe $(\mathcal{C}_f)$

si et seulement si : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a}$ ou $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a}$

La droite $\Delta : x = b$ est une asymptote verticale à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ si et seulement si

$\boxed{\lim\limits_{x \to b^+} f(x) = +\infty}$ ou $\boxed{\lim\limits_{x \to b^+} f(x) = -\infty}$ ou $\boxed{\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty}$ ou $\boxed{\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = -\infty}$

Soit $a \in IR^*_+$ et $b \in IR$. La droite $\Delta : y = ax + b$ est une asymptote obliquepour $(\mathcal{C}_f)$ si et seulement si : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0}$ ou $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0}$

Remarque : pour étudier la position relative de « Δ » et $(\mathcal{C}_f)$ il suffit d'étudier le signe de l'expression $\varphi(x) = f(x) - (ax + b)$

Branches infinies :

Si on a : $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, on calcule : $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} =$

- **0** , On dit que « ζ_f » admet une branche parabolique de direction (Ox) .
- ∞ , on di que $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction (Oy)

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$, avec a réel non nul , on a :

$\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - ax) =$

- b : On dit que la droite $\Delta : y = ax + b$ est une Asymptote oblique pour $(\mathcal{C}_f)$

ou

- ∞ : On dit que $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique oblique de direction la droite $\Delta : y = ax$