



## QCM 2 : Nombres complexes

Pour chacune des huit questions suivantes une seule des trois propositions est exacte.

On indiquera le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie.

La justification est exigée.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

- Une solution de l'équation  $2z + \bar{z} + 3 - i = 0$  est :  
a)  $1 + i$  ; b)  $1 - i$  ; c)  $-1 + i$ .
- Soit  $z$  un nombre complexe quelconque,  $|z + i|$  est égal à :  
a)  $|z| + 1$  ; b)  $|z - i|$  ; c)  $|\bar{i}z + 1|$ .
- Soit  $z$  un nombre complexe non nul d'argument  $\theta$ . Un argument de  $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{\bar{z}}$  est  
a)  $-\frac{\pi}{3} + \theta$  ; b)  $\frac{2\pi}{3} + \theta$  ; c)  $\frac{2\pi}{3} - \theta$ .
- Soit  $n$  un entier relatif. Le nombre complexe  $(\sqrt{3} + i)^n$  est imaginaire pur si, et seulement si :  
a)  $n = 3$  ; b)  $n = 6k + 3, k \in \mathbb{Z}$  ; c)  $n = 6k, k \in \mathbb{Z}$ .
- Soit A et B deux points d'affixes respectives  $i$  et  $-1$ . L'ensemble des points M d'affixe  $z$  vérifiant  $|z - i| = |iz + i|$  est :  
a) La droite (AB) ; b) le cercle de diamètre [AB] ; c) la perpendiculaire à (AB) passant par O.
- Soit  $\Omega$  le point d'affixe  $1 - i$ . L'ensemble des points M d'affixe  $z = x + iy$ , où  $x$  et  $y$  sont réels, vérifiant  $|z - 1 + i| = |3 + 4i|$  a pour équation :  
a)  $y = \frac{5}{2}x - \frac{7}{2}$  ; b)  $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$  ; c)  $z = 1 - i + 5e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}$
- Soit A, B et C les points d'affixes respectives  $4$ ,  $3i$  et  $1 - 4i$ . Le triangle ABC est :  
a) isocèle en A ; b) rectangle en A ; c) isocèle et rectangle en A.
- Soient A et B les points d'affixes respectives  $4$  et  $2 + 3i$ . l'affixe du point C tel que le quadrilatère OACB soit un parallélogramme est :  
a)  $2 + 6i$  ; b)  $-2 + 3i$  ; c)  $2 - 3i$ .
- Soit  $z = 1 + i\sqrt{3}$ .  
a)  $z^3 = 8$  ; b)  $z^3 = 8i$  ; c)  $z^3 = -8$ .

## QCM 2 : Nombres complexes

**Solution :**

**1. c)**

En effet :

$$\triangleright 2(-1+i) + \overline{(-1+i)} + 3 - i = -2 + 2i - 1 - i + 3 - i = 0.$$

$\triangleright$  si l'on pose  $z = x + iy$  avec  $x$  et  $y$  sont réels, alors

$$2z + \bar{z} + 3 - i = 0 \Leftrightarrow 2(x + iy) + (x - iy) + 3 - i = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 3 + i(y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Donc  $z = -1 + i$ .

**2. c)**

En effet :

$$\text{Pour tout nombre complexe } z, |z+i| = |i| \cdot |z+i| = |i(z+i)| = |iz-1|$$

$$\text{Et comme } |\bar{z}| = |z| \text{ alors } |z+i| = |iz-1| = \left| \overline{(iz-1)} \right| = \left| -i\bar{z}-1 \right|$$

$$\text{Or } |-\bar{z}| = |z| \text{ donc } |z+i| = \left| -i\bar{z}-1 \right| = \left| i\bar{z}+1 \right|.$$

**3. b)**

En effet :

$$\arg\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{\bar{z}}\right) \equiv \arg(-1+i\sqrt{3}) - \arg(\bar{z}) [2\pi]$$

$$\equiv \frac{2\pi}{3} + \arg(z) [2\pi]$$

$$\equiv \frac{2\pi}{3} + \theta [2\pi]$$

**4. b)**

En effet :

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^n \text{ est imaginaire pur } \Leftrightarrow \arg\left(\left(\sqrt{3}+i\right)^n\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow n \arg(\sqrt{3}+i) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow n \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow n = 3 + 6k, k \in \mathbb{Z}$$

## QCM 2 : Nombres complexes

5. c)

En effet :

$$|z-i| = |iz+i| \Leftrightarrow |z-i| = |i(z+1)| \Leftrightarrow |z-i| = |z-1| \Leftrightarrow AM = BM$$

Donc l'ensemble des points  $M(z)$  vérifiant  $|z-i| = |iz+i|$  est la médiatrice  $\Delta$  du segment  $[AB]$ . Or  $|0-i| = |i \cdot 0 + i| = 1$  donc  $O \in \Delta$ .

Ainsi,  $\Delta$  est la perpendiculaire à la droite  $(AB)$  passant par  $O$ .

6. c)

En effet :

$$\begin{aligned} \triangleright |z-1+i| = |3+4i| &\Leftrightarrow |(x-1)+i(y+1)| = 5 \Leftrightarrow |(x-1)+i(y+1)|^2 = 25 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 25 \end{aligned}$$

Donc cet ensemble ne peut être qu'un cercle d'où la réponse exacte serait 6. c)

$$\begin{aligned} \triangleright |z-1+i| = |3+4i| &\Leftrightarrow |z-1+i| = 5 \text{ donc il existe un réel } \theta \text{ tel que} \\ z-1+i = 5e^{i\theta} &\text{ ou encore } z = 1-i+5e^{i\theta}. \end{aligned}$$

7. c)

En effet :

$$\triangleright \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1-4i-4}{3i-4} = \frac{-3-4i}{i(3+4i)} = \frac{-1}{i} = i.$$

$$\text{Il en résulte : } \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = |i| \Leftrightarrow \frac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = 1 \Leftrightarrow \frac{AC}{AB} = 1 \Leftrightarrow AC = AB$$

$$\text{Et } \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \arg(i)[2\pi] \Leftrightarrow \widehat{(AB, AC)} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi].$$

Il en résulte que le triangle  $ABC$  est isocèle, rectangle en  $A$  et direct.

$$\triangleright AB = |z_B - z_A| = |-4+3i| = 5 \text{ et } AC = |z_C - z_A| = |-3-4i| = 5$$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-4) \cdot (-3) + 3 \cdot (-4) = 0$$

Donc  $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ .

Ainsi le triangle  $ABC$  est isocèle et rectangle en  $A$ .

Pour préciser le sens d'orientation du triangle  $ABC$ , il suffit d'**ajouter une figure**.

8. a)

En effet :

$$OACB \text{ est un parallélogramme } \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow z_C - z_B = z_A \Leftrightarrow z_C = z_B + z_A$$

$$\Leftrightarrow z_C = 6+3i$$

9. c)

$$\text{En effet : } z = 1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ donc } z^3 = 8e^{i\pi} = -8$$