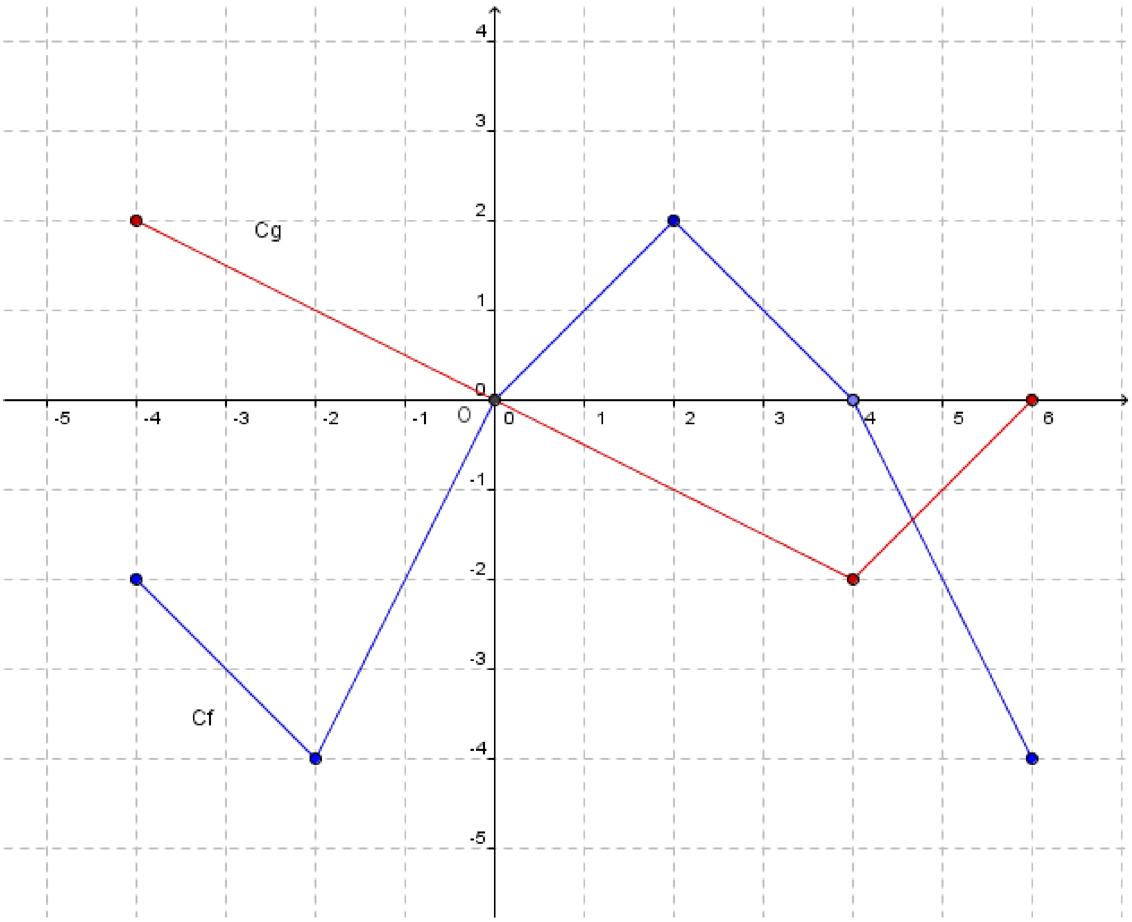
Continuité et limite d'une composée

Exercice 1

Soit f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $[-4,6]$ données par leur représentation graphique dans un repère orthonormé.

La courbe représentative de f est tracée en bleu et celle de g est tracée en rouge.



1. Donner en utilisant le graphique ci-dessus :

a) $g\circ f(-4)$, $g\circ f(-2)$, $g\circ f(-1)$, $g\circ f(0)$, $g\circ f(2)$, $g\circ f(4)$ et $g\circ f(6)$.

b) $f\circ g(-4)$, $f\circ g(-2)$, $f\circ g(-1)$, $f\circ g(0)$, $f\circ g(2)$, $f\circ g(4)$ et $f\circ g(6)$.

2. En déduire $g\circ f\left([-4,-2]\right)$, $g\circ f\left([-2,0]\right)$, $g\circ f\left([0,4]\right)$ et $f\circ g\left([-4,4]\right)$.

Exercice 2:

On considère les fonctions f , g et h définies par $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$ et $h(x) = \sqrt{x}$.

Donner l'ensemble de définition et l'expression des fonctions composées suivantes :

$g\circ f$, $f\circ g$, $h\circ f$, $f\circ h$, $g\circ h$ et $h\circ g$.

Continuité et limite d'une composée

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $[-9,+\infty[$ par $f(x)=2+\sqrt{x+9}$ et g la fonction définie sur $[2,+\infty[$ par g(x)= x^2-4x-5.

1. Montrer que pour tout x de $[2,+\infty[$, $f\circ g(x)=x$.
2. Montrer que pour tout x de $[-9,+\infty[$, $g\circ f(x)=x$.
3. Les fonctions $f\circ g$ et $g\circ f$ sont elles égales ?

Exercice 4 :

1. Soit f et g les fonctions définies sur $]-1,1[$ par f(x) = $\dfrac{x-1}{x+1}$ et g(x) = $\dfrac{x+1}{x-1}$.
   Déterminer pour tout x de $]-1,1[$, $f\circ f(x)$ et $g\circ f(x)$.
2. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par f(x) = $2x-3$ et $-1\le g(x)\le 2$.
   Montrer que pour tout x réel , $-5\le f\circ g(x)\le 1$.

Exercice 5 :

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que f(2) = 5.

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(2-x)$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(2\sin x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)$ et $\lim\limits_{x\to-1} f\left(\sqrt{2-x+x^2}\right)$.

Continuité et limite d'une composée

Exercice 1

1. a) $g\circ f$ (-4) = $g\left(f\left(-4\right)\right)$= g(-2) = 1 ; $g\circ f$ (-2) = $g\left(f\left(-2\right)\right)$ = g(-4) = 2 ;
   $g\circ f$ (-1) = $g\left(f\left(-1\right)\right)$= g(-2) = 1 ; $g\circ f$ (0) = $g\left(f\left(0\right)\right)$= g(0) = 0 ;
   $g\circ f$ (2) = $g\left(f\left(2\right)\right)$= g(2) = -1 ; $g\circ f$ (4) = $g\left(f\left(4\right)\right)$= g(-2) = 1 ;
   $g\circ f$ (6) = $g\left(f\left(6\right)\right)$ = g(-4) = 2 .
   b) $f\circ g$ (-4) = $f\left(g\left(-4\right)\right)$= f(2) = 2 ; $f\circ g$ (-2) = $f\left(g\left(-2\right)\right)$= f (1) = 1 ;
   $f\circ g$ (-1) = $f\left(g\left(-1\right)\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$; $f\circ g$ (0) = $g\left(f\left(0\right)\right)$= g(0) = 0 ;
   $f\circ g$ (2) = $f\left(g\left(2\right)\right)$= f(-1) = -2 ; $f\circ g$ (4) = $f\left(g\left(4\right)\right)$= f(-2) = -4 ;
   $f\circ g$ (6) = $f\left(g\left(6\right)\right)$= f(0) = 0.
2. $g\circ f\left(\left[-4,-2\right]\right)=g\left(f\left(\left[-4,-2\right]\right)\right)=g\left(\left[-4,-2\right]\right)=\left[1,2\right]$.
   $g\circ f\left(\left[-2,0\right]\right)=g\left(f\left(\left[-2,0\right]\right)\right)=g\left(\left[-4,0\right]\right)=\left[0,2\right]$
   $g\circ f\left(\left[0,4\right]\right)=g\left(f\left(\left[0,4\right]\right)\right)=g\left(\left[0,2\right]\right)=\left[-1,0\right]$
   $f\circ g\left(\left[-4,4\right]\right)=g\left(f\left(\left[-4,4\right]\right)\right)=g\left(\left[-2,2\right]\right)=\left[-4,2\right]$.

Exercice 2:

- Comme f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ alors $g\circ f$ et $f\circ g$ sur $\mathbb{R}$.
  Pour tout x réel, $g\circ f\left(x\right)=g\left(f\left(x\right)\right)=g\left(x+1\right)=\left(x+1\right)^2$.
  Pour tout x réel, $f\circ g\left(x\right)=f\left(g\left(x\right)\right)=f\left(x^2\right)=x^2+1$.
- $h\circ f\left(x\right)$ est définie $\Leftrightarrow$ f(x) ≥ 0 $\Leftrightarrow$ $x+1\geq 0$ $\Leftrightarrow$ $x\geq -1$.
  Donc l'ensemble de définition de $h\circ f$ est $\left[-1,+\infty\right[$.
  Pour tout x de $\left[-1,+\infty\right[$, $h\circ f\left(x\right)=h\left(f\left(x\right)\right)=h\left(x+1\right)=\sqrt{x+1}$.
- L'ensemble de définition de h est $\left[0,+\infty\right[$ et celui de f est $\mathbb{R}$ donc la fonction $f\circ h$ est définie sur $\left[0,+\infty\right[$.
  Pour tout x positif , $f\circ h\left(x\right)=f\left(h\left(x\right)\right)=f\left(\sqrt{x}\right)=\sqrt{x}+1$.

Continuité et limite d'une composée

- L'ensemble de définition de $g \circ h$ est $[0,+\infty[$.

  Pour tout x positif, $g \circ h(x) = g(h(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$.
- L'ensemble de définition de $h \circ g$ est $\mathbb{R}$.

  Donc pour tout x réel, $h \circ g(x) = h(g(x)) = h(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $[-9,+\infty[$ par $f(x) = 2 + \sqrt{x+9}$ et g la fonction définie sur $[2,+\infty[$ par g(x)= $x^2 - 4x - 5$.

1. Pour tout x de $[2,+\infty[$,

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 4x - 5) = 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2 + \sqrt{(x-2)^2} = 2 + |x-2| = 2 + x - 2 = x.$$

2. Pour tout x de $[-9,+\infty[$,

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2+\sqrt{x+9}) = (2+\sqrt{x+9})^2 - 4(2+\sqrt{x+9}) - 5$$

$$= x + 13 + 4\sqrt{x+9} - 8 - 4\sqrt{x+9} - 5$$

$$= x$$

3. Les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ n'ont le même ensemble de définition donc elles ne sont pas égales.

Exercice 4 :

1. Soit f et g les fonctions définies sur $]-1,1[$ par f(x) = $\dfrac{x-1}{x+1}$ et g(x) = $\dfrac{x+1}{x-1}$.

Pour tout x de $]-1,1[$, $f \circ f(x) = f(f(x)) = \dfrac{f(x)-1}{f(x)+1} = \dfrac{\frac{x-1}{x+1} - 1}{\frac{x-1}{x+1} + 1} = \dfrac{-2}{2x} = -\dfrac{1}{x}$

et $g \circ f(x) = g(f(x)) = \dfrac{f(x)+1}{f(x)-1} = \dfrac{\frac{x-1}{x+1} + 1}{\frac{x-1}{x+1} - 1} = \dfrac{2x}{-2} = -x$.

Continuité et limite d'une composée

2. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par f(x) = $2x-3$ et $-1\le g(x)\le 2$.

Remarquons d'abord que, pour tout x réel, $f\circ g(x)=f(g(x))=2g(x)-3$.

Or, pour tout x réel , $-1\le g(x)\le 2 \Leftrightarrow -2\le 2g(x)\le 4 \Leftrightarrow -5\le 2g(x)-3\le 1$.

Il en résulte : , pour tout x réel , $-5\le f\circ g(x)\le 1$.

<u>Exercice 5 :</u>

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que f(2) = 5.

$$\lim_{x\to 0} f(2-x)=f\left(\lim_{x\to 0}(2-x)\right)=f(2)=5 \ ;$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(2\sin x)=f\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(2\sin x)\right)=f\left(2\sin\frac{\pi}{2}\right)=f(2)=5;$$

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{2(x-1)+3}{x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty} f\left(2+\frac{3}{x-1}\right)=f\left(\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{3}{x-1}\right)\right)=f(2)=5 \ ;$$

$$\lim_{x\to-1} f\left(\sqrt{2-x+x^2}\right)=f\left(\lim_{x\to-1}\sqrt{2-x+x^2}\right)=f\left(\sqrt{4}\right)=f(2)=5.$$