Fonctions réciproques

Exercice 1

On considère les fonctions suivantes :

$f_1 :]-\infty,0] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$

$f_2 : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$

$\varphi_1 :]-\infty,0] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -x+\sqrt{x^2-x}$

$\varphi_2 : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{-x^2}{2x+1}$

1. a) Montrer que f_1 réalise une bijection de $]-\infty,0]$ sur $[0,1[$.

 b) Déterminer $f_1^{-1}(x)$ pour tout x de $[0,1[$.

2. a) Montrer que f_2 réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,1[$.

 b) Expliciter $f_2^{-1}(x)$ pour tout x de $[0,1[$.

3. a) Démontrer que $f_2^{-1}\circ f_1=\varphi_1$ et que $\varphi_2=f_1^{-1}\circ f_2$.

 b) En déduire le sens de variation de φ_1 et celui de φ_2.

 c) Montrer que les fonctions φ_1 et φ_2 sont réciproques l'une de l'autre. Qu'en déduit-on pour leurs courbes Γ_1 et Γ_2 représentations graphiques respectives, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, des fonctions φ_1 et φ_2 ?

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

 b) En déduire que la courbe (C) admet deux asymptotes dont on donnera une équation.

2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout x réel,

$$f'(x)=\frac{1}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

3. a) En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

Fonctions réciproques

b) Montrer que pour x de J, $f^{-1}(x) = -1 + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. Tracer (C) et la courbe (C') de f^{-1}.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = \sqrt{2\cot x}$

1. Montrer que f est dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ puis calculer f '(x) pour x de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

2. Etudier la dérivabilité de f à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$.

3. Montrer que f réalise une bijection de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, +\infty[$.

4. Montrer que la fonction réciproque f^{-1} de f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que pour x de $[0, +\infty[$, on a : $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{-4x}{4+x^4}$.

5. On pose pour tout x de $]0, +\infty[$, g(x) $= f^{-1}\left(\sqrt{2x}\right) + f^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{2}{x}}\right)$.

   a) Calculer $f^{-1}\left(\sqrt{2}\right)$.

   b) Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer g'(x).

   c) En déduire que $g(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Fonctions réciproques

Exercice 1

1. a) la fonction $x \mapsto \frac{x}{x-1}$ est dérivable et strictement positive sur $]-\infty,0[$ donc f_1 est dérivable sur $]-\infty,0[$. Pour tout x <0, $f_1'(x) = \frac{-\frac{1}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{x}{x-1}}} = -\frac{1}{2(x-1)^2\sqrt{\frac{x}{x-1}}} < 0$.

Ainsi f_1 est continue et strictement croissante sur $]-\infty,0]$ donc f_1 réalise une bijection de $]-\infty,0]$ sur $f_1(]-\infty,0]) = \left[f_1(0), \lim_{x\to+\infty} f_1(x)\right[= \left[0, \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x+1}}\right[= [0,1[$.

b) $\begin{cases} x \le 0 \\ f_1(x) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le y < 1 \\ f_1^{-1}(y) = x \end{cases}$

$f_1(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{x-1}} = y \Leftrightarrow \sqrt{1+\frac{1}{x-1}} = y \Leftrightarrow 1+\frac{1}{x-1} = y^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = y^2-1$

$\Leftrightarrow x-1 = \frac{1}{y^2-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y^2-1}+1 \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{y^2-1}$

Par suite, pour tout x de $[0,1[$, $f_1^{-1}(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$.

2. a) f_2 est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout x de $[0,+\infty[$, $f_2'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ >0

D'où f_2 est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$, c'est-à-dire que f_2 réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $f_2([0,+\infty[) = \left[f_2(0), \lim_x f_2\right[= \left[0, \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x+1}\right[= [0,1[$.

b) $\begin{cases} x \ge \\ f_2(x) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le y < 1 \\ f_2^{-1}(y) = x \end{cases}$

$f_2(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = y \Leftrightarrow 1-\frac{1}{x+1} = y \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = 1-y$

$\Leftrightarrow x+1 = \frac{1}{1-y} \Leftrightarrow x = \frac{1}{1-y}-1 \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y}$

Par suite, pour tout x de $[0,1[$, $f_2^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$.

Fonctions réciproques

3. a) Pour tout x de $\left]-\infty,0\right]$,

$$f_2^{-1}\circ f_1(x)=f_2^{-1}(f_1(x))=\frac{f_1(x)}{1-f_1(x)}=\frac{\sqrt{\frac{x}{x-1}}}{1-\sqrt{\frac{x}{x-1}}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\right)}{(x-1)-1}$$

$$=\sqrt{x(x+1)}-x=-x+\sqrt{x^2+x}=\varphi_1(x)$$

$$f_1^{-1}\circ f_2(x)=f_1^{-1}(f_2(x))=\frac{(f_2(x))^2}{(f_2(x))^2-1}=\frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}{\left(\frac{x}{x+1}\right)^2-1}=\frac{x^2}{x^2-(x+1)^2}=\frac{x^2}{-2x-1}$$

$$=\frac{-x^2}{2x+1}=\varphi_2(x)$$

b) Pour tout x < 0, $\varphi_1'(x)=f_1'(x).\left(f_2^{-1}\right)'(f_1(x))<0$ car $f_1'(x)<0$ et $\left(f_2^{-1}\right)'(f_1(x))>0$.

Donc φ_1 est strictement décroissante sur $\left]-\infty,0\right]$.

Pour tout $x\geq 0$ 0, $\varphi_2'(x)=f_2'(x).\left(f_1^{-1}\right)'(f_2(x))<0$ car $f_2'(x)>0$ et $\left(f_1^{-1}\right)'(f_2(x))<0$.

Donc φ_2 est strictement décroissante sur $\left[0,+\infty\right[$.

c) On a : $\varphi_1^{-1}=\left(f_2^{-1}\circ f_1\right)^{-1}=f_1^{-1}\circ f_2=\varphi_2$.

Ainsi, les fonctions φ_1 et φ_2 sont réciproques l'une de l'autre.

On en déduit que leurs courbes représentatives respectives Γ_1 et Γ_2 sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x.

Exercice 2:

1. a) Remarquons d'abord que pour tout x réel, $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}=-1$.

Fonctions réciproques

b) La droite D : y = 1 st asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$ et la droite D' :y = -1 est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

2. La fonction $x \mapsto x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto x^2+2x+2=(x+1)^2+1$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc

$x \mapsto \sqrt{x^2+2x+2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. D'où f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x réel,

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+2x+2}-(x+1)\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}}{x^2+2x+2}=\frac{x^2+2x+2-(x+1)^2}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}$$

$$=\frac{1}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}$$

3. a) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur

$J=f(\mathbb{R})=\left]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-1,1[$.

b) Pour tout x de $]-1,1[$,

$$f\circ f^{-1}(x)=f\left[f^{-1}(x)\right]=\frac{f^{-1}(x)+1}{\sqrt{\left[f^{-1}(x)\right]^2+2f^{-1}(x)+2}}$$

$$=\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{\left(-1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2+2\left(-1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)+2}}$$

$$=\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}-\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}-2+\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}+2}}$$

$$=\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

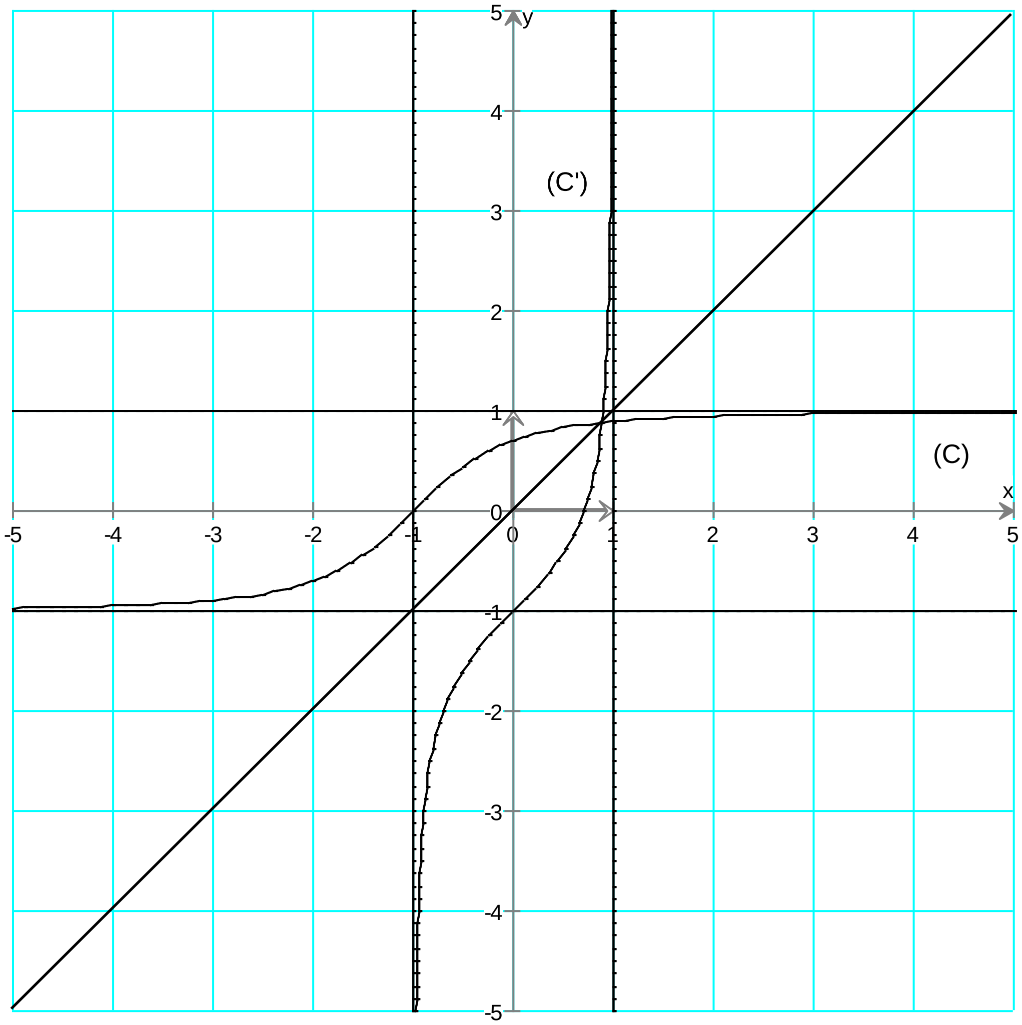
$$=1$$

Par suite, pour tout x de]-1, 1[, $f^{-1}(x)=-1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Fonctions réciproques

4. Les courbes (C) et (C') sont symétriques par rapport à la droite $\Delta : y = x$.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
f'(x)	+
f(x)	-1 $\nearrow$ 1



Fonctions réciproques

Exercice 3

1. La fonction $x \mapsto \cot x$ est dérivable et strictement positive sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ donc f est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout x de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x)=\frac{2\cot'(x)}{2\sqrt{2\cot x}}=\frac{-1-\cot^2 x}{\sqrt{2\cot x}}$.

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sqrt{2\cot x}}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim\limits_{h\to0^+}\frac{\sqrt{2\tan(h)}}{-h}=\lim\limits_{h\to0^+}-\sqrt{\frac{2}{h}}.\sqrt{\frac{\tanh}{h}}=-\infty$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en $\frac{\pi}{2}$.

3. f est continue et strictement décroissante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ donc f réalise une bijection de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $f\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right),\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\right[=[0,+\infty[$.

4. f est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout x de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x)<0$ donc f^{-1} est dérivable sur $f\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=]0,+\infty[$.

On a : $\begin{cases}0<x<\frac{\pi}{2}\\ f(x)=y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y>0\\ f^{-1}(y)=x\end{cases}$ et $\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{f'(x)}=-\frac{\sqrt{2\cot x}}{1+\cot^2 x}$

Or $y=\sqrt{2\cot x}\Leftrightarrow 2\cot x=y^2\Leftrightarrow \cot x=\frac{y^2}{2}$, donc $\left(f^{-1}\right)'(y)=-\frac{y}{1+\left(\frac{y^2}{2}\right)^2}=-\frac{4y}{4+y^4}$

Ainsi, pour tout x de $]0,+\infty[$, $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{-4x}{4+x^4}$.

Etudions à présent la dérivabilité de f^{-1} à droite en 0 :

$\lim\limits_{y\to0^+}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(0)}{y-0}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}}=0$ donc f^{-1} est dérivable à droite en 0 et $\left(f^{-1}\right)'(0)=0$

Fonctions réciproques

Comme $\left(f^{-1}\right)'(0)=0=-\frac{4\times 0}{4+0^4}$ alors on peut conclure que f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que pour x de $[0,+\infty[$, on a : $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{-4x}{4+x^4}$.

5. Pour tout x de $]0,+\infty[$, $g(x)=f^{-1}\left(\sqrt{2x}\right)+f^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{x}}\right)$.

a) On a $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2\cot\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$ et $\frac{\pi}{4}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ par conséquent $f^{-1}\left(\sqrt{2}\right)=\frac{\pi}{4}$.

b) Les fonctions $x\mapsto\sqrt{2x}$ et $x\mapsto\sqrt{\frac{2}{x}}$ sont dérivables sur $]0,+\infty[$. D'autre part f^{-1} est dérivable sur $]0,+\infty[$ donc les fonctions $x\mapsto f^{-1}\left(\sqrt{2x}\right)$ et $x\mapsto f^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{x}}\right)$ sont dérivables sur $]0,+\infty[$. Par suite, g est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Pour tout x >0, $g'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x}}\left(f^{-1}\right)'\left(\sqrt{2x}\right)+\left(-\frac{\frac{2}{x^2}}{2\sqrt{\frac{2}{x}}}\right)\left(f^{-1}\right)'\left(\sqrt{\frac{2}{x}}\right)$

$$=\frac{1}{\sqrt{2x}}.\left(-\frac{4\sqrt{2x}}{4+4x^2}\right)-\frac{1}{x^2\sqrt{\frac{2}{x}}}.\left(-\frac{4\sqrt{\frac{2}{x}}}{4+\frac{4}{x^2}}\right)$$

$$=-\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{x^2}.\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$=-\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}$$

$$=0$$

c) La fonction g est donc constante sur l'intervalle $]0,+\infty[$ d'où il existe une réel c tel que pour tout x de $]0,+\infty[$, g(x) = c.

Or $g(1)=2f^{-1}\left(\sqrt{2}\right)=\frac{\pi}{2}$ donc $c=\frac{\pi}{2}$.

Par suite, pour tout x de $]0,+\infty[$, $g(x)=\frac{\pi}{2}$.