Série : Primitives

Exercice 1.

Déterminer une primitive sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$f(x) = 3 + \cos x$; $I = \mathbb{R}$	$f(x) = \sin 3x$; $I = \mathbb{R}$	$f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$; $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$
$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-3}}$; $I = \left]-\infty, -\sqrt{3}\right[$	$f(x) = x^2(x^3+2)^3$; $I = \mathbb{R}$	$f(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+2x)^3}$; $I =]-2, 0[$

Exercice 2.

Soit la fonction f définie par $f(x) = (\sin^2 x - 3\sin x + 8).\cos x$

Déterminer sur $\mathbb{R}$ la primitive F de f telle que $F\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$

Exercice 3.

Montrer que $x^3 + 5x^2 + 7x + 4 = (x+3)(x^2+2x+1) + 1$

En déduire une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x^2 + 7x + 4}{x^2 + 2x + 1}$, sur l'intervalle $]-\infty ; -1[$

Exercice 4.

1. Soit f la fonction définie sur [-1 ; 1] par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{5-2x^2}}$.

Déterminer la primitive de la fonction f qui s'annule pour $x = 0$.

2. a) Donner une primitive de chacune des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^3}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^4}$ définies sur $I =]1 ; +\infty[$.

b) f est la fonction définie sur I par : $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^4}$.

Trouver des réels a et b tels que pour tout x de I : $f(x) = \dfrac{a}{(x-1)^3} + \dfrac{b}{(x-1)^4}$.

En déduire une primitive de f sur I.

Exercice 5.

Donner une primitive dans chacun des cas suivants de la fonction f :

a) $f(x) = \sin x \cos x$; b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, c) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos x + 2}}$; d) $f(x) = \dfrac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}$;

e) $f(x) = -2x - 1 + \dfrac{1}{(x-1)^2}$; f) $f(x) = x^3 - 2x + 1$; g) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Exercice 6.

Déterminer dans chacun des cas suivants la primitive f de f qui vérifie la condition donnée.

a) $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3$ et $F(1) = 0$; b) $f(x) = -2\sin 2x$ et $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

c) $f(x) = \cos 3x$ et $F(\dfrac{\pi}{2}) = 0$; d) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x - (-\dfrac{1}{x^2}) - 2\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et $F(1) = 1$

Série : Primitives

Exercice 7.

Déterminer les primitives des fonctions suivantes l'intervalle de continuité n'est demandé:

a) $f(x)=2x(x^2-1)^5$; b) $f(x)=\dfrac{x}{(x^2+2)^2}$; c) $f(x)=x\cos x^2$;

d) $f(x)=\sin 2x-\cos 2x$; e) $f(x)=x^2(x^3+2)^3$; f) $f(x)=\dfrac{x^2}{(x^3+2)^3}$;

g) $f(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}$; h) $f(x)=\dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; i) $f(x)=\dfrac{x}{(1+x^2)^2}$;

j) $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$; k) $f(x)=\dfrac{3}{x^2}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$

Exercice 8.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par : $f(x)=\dfrac{3x^2+12x-1}{(x+2)^2}$.

1. Déterminer deux réels a et b pour que pour tout de $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $f(x) = a+\dfrac{b}{(x+2)^2}$.

2. Déterminer F la primitive de f sur $]-\infty,2[$ qui vérifie $F(0)=\dfrac{13}{2}$

Exercice 9.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$ par : $f(x)=\dfrac{8x}{(x^2-4)^2}$.

1. Déterminer deux réels a et b pour que: pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$, $f(x)=\dfrac{a}{(x-2)^2}+\dfrac{b}{(x+2)^2}$.

2. En déduire la primitive F de f sur]-2 , 2[qui s'annule en 0.

Exercice 10.

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

1. Prouver l'existence et l'unicité d'une primitive F de f telle que $F(0)=0$.

2. Soit G la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $G(x) = F(\tan x)$.

   a) Montrer que G est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculer $G'(x)$.

Série : Primitives

b) En déduire que pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a : G (x) = x .

c) Calculer $F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

3. Etudier les variations de F.

4. On pose $H(x) = F\left(\frac{1}{x+1}\right) + F\left(\frac{x}{x+2}\right)$ pour tout $x \geq 0$.

a) Montrer que H est dérivable sur $[0, +\infty[$ et déterminer $H'(x)$.

b) En déduire que $F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Série : Primitives Corrigé

Exercice 1.

- ✓ Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 3+\cos x$ est $F : x \mapsto 3x+\sin x$.
- ✓ Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \sin 3x$ est $F : x \mapsto -\frac{1}{3}\cos 3x$.
- ✓ Une primitive sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{\cos^2 x} = -\frac{-\sin x}{\cos^2 x}$ est

  $F : x \mapsto \frac{1}{\cos x}$.
- ✓ Une primitive sur $\left]-\infty,-\sqrt{3}\right[$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2-3}} = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2-3}}$ est

  $F : x \mapsto \sqrt{x^2-3}$.
- ✓ Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto x^2\left(x^3+2\right)^3 = \frac{1}{3}\left(3x^2\right)\left(x^3+2\right)^3$ est

  $F : x \mapsto \frac{1}{4}\left(x^3+2\right)^4$.
- ✓ Une primitive sur $\left]-2,0\right[$ de la fonction $f : x \mapsto f(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x)^3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2}{(x^2+2x)^3}$

  est $F : x \mapsto -\frac{1}{4}(x^2+2x)^{-2} = -\frac{1}{4(x^2+2x)^2}$.

Exercice 2.

Pour tout x réel,

$f(x) = (\sin^2 x - 3\sin x + 8).\cos x = \cos x \times \sin^2 x - 3\cos x \times \sin x + 8\cos x$

$$F(x) = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{3}{2}\times\sin^2 x + 8\times\sin x + c,\ \ c\in\mathbb{R}$$

$$F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\sin^3\frac{3\pi}{2} - \frac{3}{2}\times\sin^2\frac{3\pi}{2} + 8\times\sin\frac{3\pi}{2} + k = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} - \frac{3}{2} - 8 + k = 0 \ \Leftrightarrow k = \frac{59}{6}$$

$$F(x) = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{3}{2}\sin^2 x + 8\sin x + \frac{59}{6}$$

Exercice 3.

Pour tout x réel, $(x+3)(x^2+2x+1)+1 = x^3+2x^2+x+3x^2+6x+x+1 = x^3+5x^2+7x+4$.
Ainsi, pour tout x de $\left]-\infty,-1\right[$,

$$f(x) = \frac{x^3+5x^2+7x+4}{x^2+2x+1} = \frac{(x+3)(x^2+2x+1)+1}{x^2+2x+1} = x+3+\frac{1}{x^2+2x+1} = x+3+\frac{1}{(x+1)^2}$$

Donc $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - \frac{1}{x+1}$

Exercice 4.

1. Soit f la fonction définie sur [-1 ; 1] par : f(x) = $\dfrac{x}{\sqrt{5-2x^2}}$.

Pour tout x de [-1, 1] , f(x) = $\dfrac{x}{\sqrt{5-2x^2}} = -\dfrac{1}{4}.\dfrac{-4x}{\sqrt{5-2x^2}}$

Les primitives de f sur [-1 ; 1] sont les fonctions F définie sur [-1, 1] par :

F(x) = $-\dfrac{1}{4}.2.\sqrt{5-2x^2} + c = -\dfrac{1}{2}\sqrt{5-2x^2} + c\,,\ c \in$.

On veut de plus F(0) = 0, c'est à dire : $-\dfrac{1}{2}\sqrt{5-2\times 0^2} + c = 0$ donc $c = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Conclusion : F(x) = $-\dfrac{1}{2}\sqrt{5-2x^2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

2. a) Chacune des fonctions proposées ci-dessous est continue sur]1 ; +∞[, elles admettent donc une primitive sur]1 ; +∞[:

✓ primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^3}$:

on pose $u(x) = x - 1$; $u'(x) = 1$

on a alors $\dfrac{1}{(x-1)^3} = \dfrac{u'(x)}{(u(x))^3} = u'(x) \times (u(x))^{-3}$

Une primitive de cette fonction est alors $\dfrac{1}{-3+1}(u(x))^{-3+1} = \dfrac{1}{-2(u(x))^2} = \dfrac{1}{-2(x-1)^2}$

✓ primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^4}$:

on a alors $\dfrac{1}{(x-1)^4} = \dfrac{u'(x)}{(u(x))^4} = u'(x) \times (u(x))^{-4}$

Une primitive de cette fonction est alors $\dfrac{1}{-4+1}(u(x))^{-4+1} = \dfrac{1}{-3(u(x))^3} = \dfrac{1}{-3(x-1)^3}$

b) f est la fonction définie sur]1 ; +∞[par f(x) = $\dfrac{x}{(x-1)^4}$

f(x) = $\dfrac{a}{(x-1)^3} + \dfrac{b}{(x-1)^4} = \dfrac{a(x-1)+b}{(x-1)^4} = \dfrac{ax-a+b}{(x-1)^4}$

on en déduit : $\begin{cases} a = 1 \\ -a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$ Donc f(x) = $\dfrac{1}{(x-1)^3} + \dfrac{1}{(x-1)^4}$

Les primitives de f sur]1 ; +∞[sont les fonctions f définie par :

F(x) = $\dfrac{-1}{2(x-1)^2} - \dfrac{1}{3(x-1)^4} + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

Série : Primitives Corrigé

Exercice 5

a) f(x) = sin x cos x de la forme u'(x) u(x) avec u(x) = sin x donc $F(x)=\frac{1}{2}\sin^2 x$

ou encore en prenant u(x) = cos x , $F(x)=-\frac{1}{2}\cos^2 x$.

b) $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sqrt{x}}=-(-\frac{1}{x^2})-2\frac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $F(x)=-\frac{1}{x}-2\sqrt{x}$

c) $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x+2}}=-\frac{-\sin x}{\sqrt{\cos x+2}}=-\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ donc $F(x)=-\sqrt{u(x)}=-\sqrt{\cos x+2}$

d) $f(x)=\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}=2\frac{1}{2\sqrt{x}}\times(\sqrt{x}+1)^2=2u'(x)u^2(x)$ donc $F(x)=u^3(x)=\frac{2}{3}(\sqrt{x}+1)^3$

e) $f(x)=\frac{-2x^3+3x^2}{(x-1)^2}=\frac{-2x(x-1)^2-x^2+2x}{(x-1)^2}=\frac{-2x(x-1)^2-(x-1)^2+1}{(x-1)^2}=-2x-1+\frac{1}{(x-1)^2}$

Donc $F(x)=-x^2-x-\frac{1}{x-1}$.

f) $f(x)=x^3-2x+1$ donc $F(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2+x$

g) $f(x)=1-\frac{1}{\cos^2 x}$ donc F(x) = x – tan x

Exercice 6

a) $F(x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+c,\ c\in\mathbb{R}$

$F(1)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+c=\frac{12-6+4-3}{12}+c=\frac{7}{12}+c$ d'où $c=-\frac{7}{12}$

b) F(x) = cos 2x + c , $c\in\mathbb{R}$

$F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{2}+c=c=1$ donc F(x) = cos 2x + 1

c) $F(x)=\frac{1}{3}\sin 3x+c,\ c\in\mathbb{R}$

$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2}+c=-\frac{1}{3}+c=0$ donc $F(x)=\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{3}$

d) $F(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}-2\sqrt{x}+c,\ c\in\mathbb{R}$

$F(1)=\frac{1}{2}-1-2+c=-\frac{5}{2}+c=1$ donc $F(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}-2\sqrt{x}+\frac{7}{2}$

Exercice 7

a) On pose $u(x) = x^2 - 1$, $u'(x) = 2x$

La dérivée de la fonction $x \mapsto (x^2-1)^6$ est $x \mapsto 6\times 2x \times (x^2-1)^5$ donc $F(x) = \frac{1}{6}(x^2-1)^6$

b) $f(x) = \frac{x}{(x^2+2)^2} = \frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2+2)^2} = \frac{1}{2}\frac{u'(x)}{u^2(x)}$ donc $F(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{u(x)} = -\frac{1}{2(x^2+2)}$

c) $f(x) = x\cos\left(x^2\right) = \frac{1}{2}.2x\cos\left(x^2\right) = \frac{1}{2}u'(x)\cos\left(u(x)\right)$ donc

$F(x) = \frac{1}{2}\sin u(x) = \frac{1}{2}\sin\left(x^2\right)$

d) $f(x) = \sin 2x - \cos 2x = \frac{1}{2}2\sin 2x - \frac{1}{2}2\cos 2x$ donc $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x$

e) $f(x) = x^2(x^3+2)^3 = \frac{1}{3}3x^2(x^3+2)^3 = \frac{1}{3}u'(x)u^3(x) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times 4u'(x)u^3(x)$

donc $F(x) = \frac{1}{12}u^4(x) = \frac{1}{12}(x^3+2)^4$

f) $f(x) = \frac{x^2}{(x^3+2)^3} = x^2(x^3+2)^{-3} = \frac{1}{3}3x^2\left(x^3+2\right)^{-3} = \frac{1}{3}.\frac{1}{(-2)}.(-2).3x^2\left(x^3+2\right)^{-3}$

donc $F(x) = -\frac{1}{6}(x^3+2)^{-2} = -\frac{1}{6(x^3+2)^2}$

g) $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{4}\frac{4x^3}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{4}\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} = \frac{2}{4}\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ donc $F(x) = \frac{1}{2}\sqrt{u(x)} = \frac{1}{2}\sqrt{1+x^4}$

h) $f(x) = \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 2.\frac{1}{2\sqrt{x}}.\cos\sqrt{x} = 2u'(x)\cos\left(u(x)\right)$ donc $F(x) = 2\sin\left(u(x)\right) = 2\sin\sqrt{x}$

i) $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\frac{2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\frac{u'(x)}{u^2(x)}$ donc $F(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{u(x)} = -\frac{1}{2(1+x^2)}$

j) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}} = \frac{1}{2}\frac{2(x-1)}{\sqrt{x^2-2x+3}} = \frac{1}{2}\frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+3}}$

donc $F(x) = \sqrt{x^2-2x+3}$

k) $f(x)=\frac{3}{x^2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$ avec $u(x)=\frac{x-1}{x}=1-\frac{1}{x}$ et $u'(x)=\frac{1}{x^2}$

$f(x)=3u'(x)u^2(x)$ donc $F(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)^3$

Exercice 8

$$f(x)=\frac{3x^2+12x-1}{(x+2)^2}=\frac{3(x+2)^2-13}{(x+2)^2}=3-\frac{13}{(x+2)^2}$$

soit $g(x)=\frac{13}{(x+2)^2}$, on pose $u(x)=x+2$ et $u'(x)=1$

$g(x)=-13\frac{-u'(x)}{u^2(x)}$, on obtient $G(x)=-\frac{13}{x+2}$

on a donc $F(x)=3x+\frac{13}{x+2}+c,\ c\in\mathbb{R}$.

Or $F(0)=\frac{13}{2}\Leftrightarrow c=0$ donc $F(x)=3x+\frac{13}{x+2}$

Exercice 9

$$f(x)=\frac{8x}{(x^2-4)^2}$$

pour tout x $\in\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$,

$$f(x)=\frac{ax^2+4ax+4a+bx^2-4bx+4b}{(x^2-4)^2}=\frac{(a+b)x^2+(4a-4b)x+4a+4b}{(x^2-4)^2}$$

par identification, on a $\begin{cases}a+b=0\\4a-4b=8\\4a+4b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=0\\a-b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$

donc $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{(x+2)^2}$

2. En posant $u(x)=x-2$ avec $u'(x)=1$ et $v(x)=x+2$ avec $v'(x)=1$

on a: $f(x)=\frac{-u'(x)}{u^2(x)}-\frac{v'(x)}{v^2(x)}$ $\quad d'où\ F(x)=-\frac{1}{(x-2)}+\frac{1}{(x+2)}+k$

$F(0)=0\Leftrightarrow k=0$

$d'où\ F(x)=-\frac{1}{(x-2)}+\frac{1}{(x+2)}$

Série : Primitives Corrigé

Exercice 10

1. La fonction f est continue sur $[0,+\infty[$ donc f admet une seule primitive F sur $[0,+\infty[$ vérifiant F (0) = 0.

2. Soit g (x) = $F(\tan x)$ où $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

a) ✓ La fonction $x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

✓ Pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan x \in [0,+\infty[$

✓ La fonction F est une primitive de f sur $[0,+\infty[$ donc F est dérivable sur $[0,+\infty[$.

Donc la fonction g est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. Pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$,

$$g'(x)=(1+\tan^2 x)F'(\tan x)=(1+\tan^2 x).\frac{1}{1+\tan^2 x}=1$$

b) Il existe un réel c tel que pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, g(x) = x + c.

Or $0=F(0)=F(\tan 0)=g(0)$ donc c = 0.

Il en résulte que, pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, g(x) = x.

c) $F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=F\left(\tan\frac{\pi}{6}\right)=g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}$.

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} F(\tan x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} g(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} x=\frac{\pi}{2}$ or $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=\frac{\pi}{2}$.

3. F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et on a: pour tout x de $[0,+\infty[$, $F'(x)=f(x)>0$.

x	0	$+\infty$
F'(x)	+	
F(x)	0 ↗	$\frac{\pi}{2}$

4. On pose $H(x) = F\left(\dfrac{1}{x+1}\right)+F\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$ pour tout $x \geq 0$.

a) ✓ La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x+2}$ sont dérivables sur $[0,+\infty[$

✓ Pour tout x positif, $\dfrac{1}{x+1} \in [0,+\infty[$ et $\dfrac{x}{x+2} \in [0,+\infty[$.

✓ F est dérivable sur $[0,+\infty[$

donc les fonctions $x \mapsto F\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ et $x \mapsto F\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$ sont dérivables sur $[0,+\infty[$

D'où la fonction H est dérivable sur $[0,+\infty[$.

Pour tout x positif,

$$H'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}F'\left(\frac{1}{1+x}\right) + \frac{2}{(x+2)^2}F'\left(\frac{x}{x+2}\right)$$

$$= -\frac{1}{(1+x)^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x+1}\right)^2} + \frac{2}{(x+2)^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}$$

$$= \frac{-1}{(x+1)^2+1} + \frac{2}{(x+2)^2+x^2}$$

$$= \frac{-1}{x^2+2x+2} + \frac{1}{x^2+2x+2}$$

$$= 0$$

b) On en déduit que H est une fonction constante sur $[0,+\infty[$ et par suite il existe un réel c tel que pour tout x de $[0,+\infty[$, $H(x) = c$.

Or $H(0) = F(1) + F(0) = F(1) = F\left(\tan\dfrac{\pi}{4}\right) = g\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ donc pour tout x de $[0,+\infty[$,

$H(x) = \dfrac{\pi}{4}$.

Ainsi, pour $x = 1$, on a : $H(1) = \dfrac{\pi}{4}$ donc $F\left(\dfrac{1}{2}\right)+F\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.