## Exercice 1

Soit $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 2^n \sin \frac{\theta}{2^n}$ et $v_n = 2^n \tan \frac{\theta}{2^n}$.

Montrer que $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

## Exercice 2

Soit $f : x \mapsto x - x^2$ et $(u_n)$ la suite définie par $u_0 \in ]0, 1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$.
2. En déduire que la suite $(nu_n)$ est croissante et admet une limite $\ell \in ]0, 1]$.
3. En posant $v_n = nu_n$, montrer que la suite $(n(v_{n+1} - v_n))$ a une limite que l'on déterminera.

## Exercice 3

Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + \frac{1}{n+1}}$ , $n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $0 < u_{2n+1} < 1$.
2. Calculer $u_{n+2} - u_n$ et montrer que la suite $(u_{2n+1})$ est croissante.
3. Montrer que si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n+1} = \alpha < 1$, alors $n(u_{2n+1} - u_{2n-1})$ a une limite non nulle.

   Sachant que $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}) = +\infty$, conclure.
4. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

## Exercice 4

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels en posant

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{u_{n-1}} \text{ pour tout } n \geq 1. \end{cases}$$

### Partie A

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne poss ède pas de limite finie $\ell$
4. D éduire des questions précédentes que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

### Partie B

1. Ecrire $u_n - u_{n-1}$ et $u_n + u_{n-1}$ en fonction de $u_{n-1}$ , et montrer que

   pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2 < u_n^2 - u_{n-1}^2 \leq 2 + u_n - u_{n-1}$.

2. En d éduire quepour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2n < u_n^2 - 1 \leq 2n + u_n - 1$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \dfrac{\sqrt{2n}}{u_n}$.

   En déduire de ce qui précède que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente dont

   on précisera la limite.

## Exercice 1

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ , $\dfrac{\theta}{2^n} \in ]0, \dfrac{\pi}{2}[$, on a $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

Calculons $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 2\dfrac{\sin \frac{\theta}{2^{n+1}}}{\sin \frac{\theta}{2^n}} = \dfrac{1}{\cos \frac{\theta}{2^{n+1}}} > 1$

car $\sin 2x = 2\cos x \sin x$. Donc la suite $(u_n)$ est donc croissante.

Maintenant pour $(v_n)$, calculons $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 2\dfrac{\tan \frac{\theta}{2^{n+1}}}{\tan \frac{\theta}{2^n}}$

Or $\tan 2\,x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ donc $\dfrac{2\tan x}{\tan 2\mathrm{x}} = 1-\tan^2 x$

Par suite $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 1-\tan^2\dfrac{\theta}{2^n} < 1$ . Donc la suite $(v_n)$ est décroissante.

D'autre part $\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\sin \frac{\theta}{2^n}}{\tan \frac{\theta}{2^n}} = \cos \frac{\theta}{2^n} < 1$ donc $u_n < v_n$ .

Donc les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes .

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \theta\,\frac{\sin \frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}} = \theta\,.$$

## Exercice 2

1. On a pour tout $x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 - x$.

   On obtient le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | | $\frac{1}{4}$ | | |
| | $-\infty$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | $-\infty$ |

   On a : $f(]0,1[) = ]0, \frac{1}{4}]$.

   Si $u_n \in ]0,1[$, alors $u_{n+1} \in ]0,1[$.

   Si $u_n < \frac{1}{n+1}$, alors pour $n > 1$, $f$ étant croissante sur $]0, \frac{1}{2}]$, on a : $f(u_n) < f(\frac{1}{n+1})$, d'où

$$u_{n+1} < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n}{(n+1)^2} < \frac{1}{n+2}.$$

   Si $n = 1$, alors $u_1 = f(u_0) \in ]0, \frac{1}{4}]$ et donc $0 < u_1 < \frac{1}{2}$.

2. Calculons

$$\begin{aligned}(n+1)u_{n+1} - nu_n &= (n+1)(u_n - u_n^2) - nu_n \\ &= u_n[(n+1)(1-u_n) - n] \\ &= u_n[1-(n+1)u_n] > 0.\end{aligned}$$

   Donc $(nu_n)$ est croissante. De plus : $0 < nu_n < n\dfrac{1}{n+1} < 1.$

   On en déduit que $(nu_n)$ est convergente vers un réel $\ell \in ]0,1]$.

3. Soit $v_n = nu_n$. On a :

$$\begin{aligned}n(v_{n+1} - v_n) &= n[(n+1)u_{n+1} - nu_n] &= n[(n+1)(u_n - u_n^2) - nu_n] \\ &= nu_n[(n+1)(1-u_n) - n] &= nu_n[1-(n+1)u_n]\end{aligned}$$

Donc $\quad n(v_{n+1}-v_n) \quad = \quad nu_n[1-nu_n-u_n] > 0$

car $(u_n)$ tend vers 0 puisque $0 < u_n < \dfrac{1}{n+1}$. La suite $(n(v_{n+1}-v_n))$ converge vers $\ell\,(1-\ell\,)$.

## Exercice 3

1. On a : $0 < u_1 = \dfrac{1}{u_0+1} < 1$.

   Puis comme $u_2 = \frac{1}{u_1+\frac{1}{2}}$ et $\frac{1}{2} < u_1 + \frac{1}{2} < \frac{3}{2}$, c'est-à-dire $\frac{2}{3} < u_1 < 2$, on trouve

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} < u_2 + \frac{1}{3} < 2 + \frac{1}{3} \Rightarrow u_3 < 1.$$

   Supposons pour $n \geq 2$ que $0 < u_{2n+1} < 1$, alors

$$\frac{1}{2n+2} < u_{2n+1} + \frac{1}{2n+2} < 1 + \frac{1}{2n+2} \Rightarrow \frac{2n+2}{2n+3} < u_{2n+2} < 2n+2.$$

   De $\dfrac{2n+2}{2n+3} + \dfrac{1}{2n+3} < u_{2n+2} + \dfrac{1}{2n+3}$, on a bien : $u_{2n+3} < 1$.

2. On a : $\quad u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + \frac{1}{n+1}} = \dfrac{n+1}{(n+1)u_n+1} \qquad$ et

$$u_{n+2} = \frac{1}{u_{n+1} + \frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{(n+2)u_{n+1}+1} = \frac{n+2}{(n+2)\frac{n+1}{(n+1)u_n+1}+1} = \frac{[(n+1)u_n+1](n+2)}{(n+2)(n+1)+(n+1)u_n+1},$$

$$\text{d'où} \quad u_{n+2} - u_n = \frac{[(n+1)u_n + 1](n+2)}{(n+2)(n+1) + (n+1)u_n + 1} - u_n$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)u_n + (n+2) - (n+1)(n+2)u_n - (n+1)u_n^2 - u_n}{(n+2)(n+1) + (n+1)u_n + 1}$$

$$= \frac{(n+2) - (n+1)u_n^2 - u_n}{(n+2)(n+1) + (n+1)u_n + 1}.$$

Comme 1 est racine du polynôme $-(n+1)X^2 - X + (n+2)$, on a :

$$u_{n+2} - u_n = -\frac{(u_n - 1)[(n+1)u_n + n + 2]}{(n+2)(n+1) + (n+1)u_n + 1}$$

On obtient alors $\quad u_{2n+3} - u_{2n+1} = -\dfrac{(u_{2n+1} - 1)[(2n+2)u_{2n+1} + 2n + 3]}{(2n+3)(2n+1) + (2n+2)u_{2n+1} + 1} > 0.$

3. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \alpha < 1$, alors

$$u_{2n+1} - u_{2n-1} = -\frac{(u_{2n-1} - 1)[2nu_{2n-1} + 2n + 1]}{2n(2n+1) + 2nu_{2n+1} + 1},$$

d'où

$$n(u_{2n+1} - u_{2n-1}) = -\frac{(u_{2n-1} - 1)[2u_{2n-1} + 2 + \frac{1}{n}]n^2}{[2(2 + \frac{1}{n}) + \frac{2u_{2n+1}}{n} + \frac{1}{n^2}]n^2} = -\frac{(u_{2n-1} - 1)[2u_{2n-1} + 2 + \frac{1}{n}]}{[2(2 + \frac{1}{n}) + \frac{2u_{2n+1}}{n} + \frac{1}{n^2}]}$$

$$\Rightarrow n(u_{2n+1} - u_{2n-1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{4} = \frac{1 - \alpha^2}{2} > 0.$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} n(u_{2n+1} - u_{2n-1}) > \frac{1 - \alpha^2}{4}.$$

Il existe donc $N$ tel que pour tout $n \geq N$, on a : $n(u_{2n+1} - u_{2n-1}) > \frac{1-\alpha^2}{4}$.

Donc

$$\begin{array}{lcl}
u_{2N+1} - u_{2N-1} & > & \dfrac{1-\alpha^2}{4N} \\
u_{2N+3} - u_{2N+1} & > & \dfrac{1-\alpha^2}{4(N+1)} \\
u_{2N+5} - u_{2N+3} & > & \dfrac{1-\alpha^2}{4(N+2)} \\
... & > & \\
\hline
u_{2n+1} - u_{2N-1} & > & \dfrac{1-\alpha^2}{4} + \dfrac{1-\alpha^2}{4N} + \dfrac{1-\alpha^2}{4(N+1)} + ... + \dfrac{1-\alpha^2}{4n^2}.
\end{array}$$

On en déduit que $u_{2n+1} > u_{2N-1} + \dfrac{1-\alpha^2}{4}(1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n}) - \dfrac{1-\alpha^2}{4}(1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{N-1})$

et que $(u_{2n+1})$ diverge, donc contradiction.

4. Soit $\qquad u_{2n} = \dfrac{1}{u_{2n-1} + \frac{1}{2n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

$(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ converge vers 1, donc $(u_n)$ tend aussi vers 1.

**Exercice 4**

## Partie A

1. Montrons par récurrence que: pour tout $n$, $u_n \geq 1$.

   On a $u_0 = 1$ donc $u_n \geq 1$.

   Supposons que, pour $n \geq 2$ fixé, $u_n \geq 1$. Montrons que c'est encore vrai à l'ordre $(n+1)$.

   Comme $u_n \geq 1$, $\dfrac{1}{u_n}$ est positive, donc on a aussi $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \geq 1$.

   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

2. $u_n - u_{n-1} = \dfrac{1}{u_{n-1}} > 0$. On en déduit que $(u_n)$ est croissante.

3. Raisonnons par l'absurde: Supposons que $(u_n)$ converge vers $\ell$.

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \Rightarrow \ell = \ell + \frac{1}{\ell} \Rightarrow \ell^2 = \ell^2 + 1 \Rightarrow 1 = 0,$$

   donc contradiction. On en déduit que $(u_n)$ n'a pas de limite.

4. $(u_n)$ n'est pas majorée. En effet si elle est majorée et croissante, elle converge.

   Or elle n'a pas de limite, donc elle est non-majorée.

   Soit $M \in \mathbb{R}$. Comme $(u_n)$ est non majorée, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > M$.

   Comme cela est valable pour tout $M \in \mathbb{R}_+$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

## Partie B

1. On a $$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{u_{n-1}} \text{ et } u_n + u_{n-1} = 2u_{n-1} + \frac{1}{u_{n-1}}.$$

   On voit que $$u_n^2 - u_{n-1}^2 = (u_n - u_{n-1})(u_n + u_{n-1}) = 2 + \frac{1}{u_{n-1}^2} > 2$$

   car $\frac{1}{u_{n-1}^2} > 0$. Comme $(u_n)$ est croissante, on a
   $$u_n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{u_{n-1}} > \frac{1}{u_{n-1}^2},$$

   d'où $2 < u_n^2 - u_{n-1}^2 < 2 + u_n - u_{n-1}$.

2. Ecrivons
$$\begin{array}{rll}
2 < & u_1^2 - u_0^2 & \leq 2 + u_1 - u_0 \\
2 < & u_2^2 - u_1^2 & \leq 2 + u_2 - u_1 \\
\vdots & & \\
2 < & u_n^2 - u_{n-1}^2 & \leq 2 + u_n - u_1 \\
\hline
2n < & u_n^2 - u_0^2 & \leq 2n + u_n - u_0
\end{array}$$

   Comme $u_0 = 1$, on obtient bien $$2n < u_n^2 - 1 \leq 2n + u_n - 1.$$

3. Multiplions chaque membre par $\frac{1}{u_n^2}$, on a
$$\frac{2n}{u_n^2} < 1 - \frac{1}{u_n^2} < \frac{2n}{u_n^2} + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_n^2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{u_n^2} < \frac{2n}{u_n^2} + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_n^2}$$

   On en déduit que $$1 - \frac{1}{u_n} < \frac{2n}{u_n^2}.$$

   Cela donne $$1 - \frac{1}{u_n} < v_n^2 < 1 - \frac{1}{u_n^2}.$$

   On en déduit immédiatement que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$.