EXERCICE 1:

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Dans la figure 1 si dessous on a :

- $\mathscr{C}_f$ Est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$
- La droite $\Delta : y = 1$ est asymptote horizontale a la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$
- $\mathscr{C}_f$ possède deux tangentes aux points d'abscisses -1 et 0 et deux demi-tangentes au point d'abscisse 1

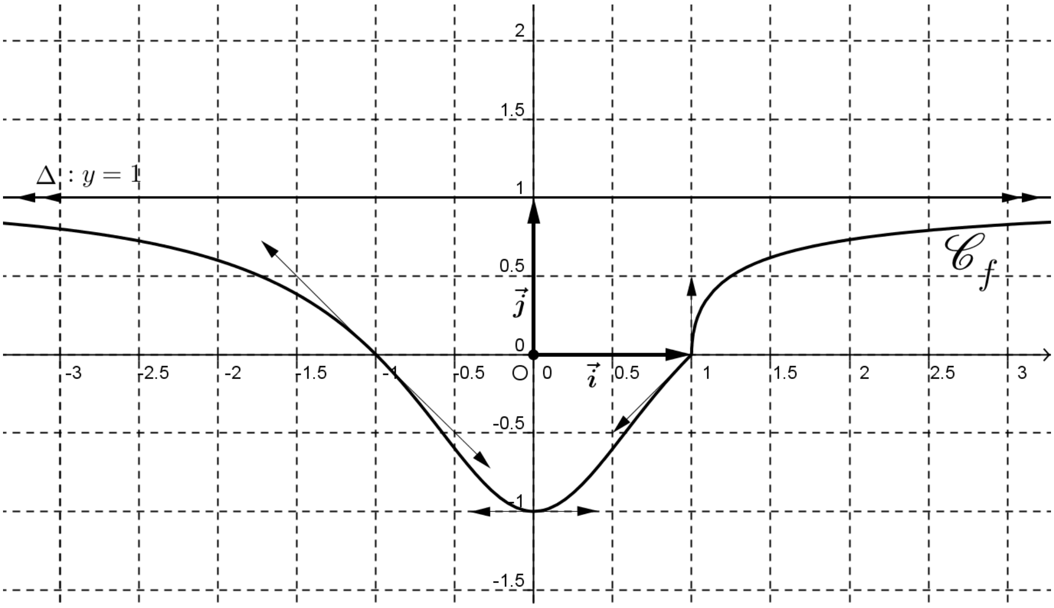


figure 1

On utilisant le graphique répondre aux questions suivantes :

1-a-Déterminer $f'(-1)$; $f'(0)$

b- Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)-1}$; $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)}{x-1}$

2-a-Déterminer les intervalles sur les quelles f est dérivable

b-Dresser le tableau de variation de f

3- Soit g la fonction définie par $g=\sqrt{f}$

a-Déterminer l'ensemble de définition de g

b- Déterminer les intervalles sur les quelles g est dérivable

c-Dresser le tableau de variation de g

EXERCICE 2 :

Pour tout réel x on pose $h(x)=\cos x+\cos 3x$

1- a-Verifier que pour tous réels a et b on a : $\cos(a-b)+\cos(a+b)=2\cos a\cdot\cos b$

b-En déduire que $h(x)=2\cos 2x\cdot\cos x$

c-Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi,\pi]$ l'équation $h(x)=\cos 2x$

2- a-Montrer que $2\sin x\cdot h(x)=\sin 4x$

b-En déduire que $h(\frac{\pi}{5})=\frac{1}{2}$ et que $\cos(\frac{\pi}{5})\times\cos(\frac{3\pi}{5})=-\frac{1}{4}$

3- Montrer alors que $\cos(\frac{\pi}{5})=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos(\frac{3\pi}{5})=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$

EXERCICE 3:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x-1} & \text{si } x\in[0,+\infty[\setminus\{1\} \\ f(x)=\sqrt{x^2+x+1} & \text{si } x\in]-\infty,0] \end{cases}$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1- Montrer que f est continue en 0.

2- a-Etudier la dérivabilité de f en 0.interpréter graphiquement les résultats.
b-Déterminer les intervalles sur les quels f est dérivable

3- Calculer $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f

4- Donner l'équation de la tangente T à (ζ) au point d'abscisse -1

5- Montrer que les droites $\Delta: y=x+2$ et $\Delta': y=-x-\dfrac{1}{2}$ sont deux asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ respectivement

EXERCICE 1 :RÉPONSES

On utilisant le graphique répondre aux questions suivantes :

1-a- D'après le graphique f est dérivable en -1 et en 0

- La pente de la tangente a la courbe au point d'abscisse -1 est : $f'(-1)=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{0.5-0}{-1.5-(-1)}=\dfrac{0.5}{-0.5}=-1$

d'où $\boxed{f'(-1)=-1}$

- La pente de la tangente a la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est nul (tangente parallèle a l'axe des abscisses)

donc $\boxed{f'(0)=0}$

b- • La droite $\Delta: y=1$ est asymptote horizontale a la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

La courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessous de son asymptote Δ, donc $f(x)-1\prec 0$, et par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-1=0^-$, ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)-1}=-\infty}$$

- D'après le graphique f est dérivable a gauche de 1 , $f(1)=0$, $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f_g{}'(1)$.

La pente de la demi tangente a la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est $f'_g(1)=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{0-(-0.5)}{1-0.5}=\dfrac{0.5}{0.5}=1$

d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)}{x-1}=1}$

$f(1)=0$, $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$; La courbe $\mathscr{C}_f$ admet a droite de 1 une <u>demi tangente verticale</u> dirigée vers le haut, donc f n'est pas dérivable a droite de 1 est $\boxed{\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)}{x-1}=+\infty}$

2-a • f est dérivable en tout réel différent de1,

• f est dérivable a gauche de 1,mais n'est pas dérivable a droite de 1

ainsi f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty,1]$ et $]1,+\infty[$

b- Tableau de variation de la fonction f (voir tableau)

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	-1		$\nearrow$		1

Tableau de variation de f

3-a-g la fonction définie par $g=\sqrt{f}$. g est définie pour les réels x qui vérifient $f(x)\geqslant 0$

d'après le graphique les réels x qui vérifient $f(x)\geqslant 0$ sont les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ pour les quelles $\mathscr{C}_f$ est <u>au dessus de l'axe des abscisses</u> , ainsi le domaine de définition de g est : $\boxed{D=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[}$

b- $f(1)=f(-1)=0$, $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{\sqrt{f(x)}}{x+1}=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{f(x)}{(x+1)\sqrt{f(x)}}=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{f(x)}{x+1}\times\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$

• f est dérivable en -1 donc f est dérivable a gauche en -1 , ainsi $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{f(x)}{x+1}=f_g'(-1)=-1$

• $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\sqrt{f(x)}=0$ et $\sqrt{f(x)}\geqslant 0$, d'où $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}=(-1)\times(+\infty)=-\infty$, ainsi g n'est pas dérivable a gauche en -1

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{f(x)}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)}{\sqrt{f(x)}\,(x-1)}=\underbrace{\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)}{x-1}}_{+\infty}\times\underbrace{\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}}_{+\infty}=+\infty$,

ainsi g n'est pas dérivable a droite en 1

Conclusion : g est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$ et $]1,+\infty[$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$g'(x)$		$\|\|$		$\|\|$	
$g(x)$	1 $\searrow$	0		0	$\nearrow$ 1

Tableau de variation de $g=\sqrt{f}$

c- Le sens de variation de g est celle de la fonction f $\boxed{g'=\left(\sqrt{f}\right)'=\dfrac{f'}{2\sqrt{f}}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{f(x)}=\sqrt{1}=1$

EXERCICE 2 : RÉPONSES

Pour tout réel x on pose $h(x)=\cos x+\cos 3x$

2- a- $\underbrace{\cos(a-b)}_{\cos a\cos b+\sin a\sin b}+\underbrace{\cos(a+b)}_{\cos a\cos b-\sin a\sin b}=2\cos a\cdot\cos b$ **(1)**

b- $h(x)=\cos x+\cos 3x=\cos(2x-x)+\cos(2x+x)$, on pose $a=2x$ et $b=x$ dans l'égalité(1) , on aura :

$\cos(\underbrace{2x}_{a}-\underbrace{x}_{b})+\cos(\underbrace{2x}_{a}+\underbrace{x}_{b})=2\cos 2x\cdot\cos x$, ainsi $\boxed{h(x)=2\cos 2x\cdot\cos x}$ **(2)**

c- $h(x)=\cos 2x$ signifie $2\cos 2x\cdot\cos x=\cos 2x$ signifie $2\cos 2x\cdot\cos x-\cos 2x=0$
signifie $\cos 2x\cdot(2\cos x-1)=0$ signifie $\cos 2x=0$ ou $(2\cos x-1)=0$

• $\cos 2x=0$ signifie $2x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$, donc $x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}$; $k\in\mathbb{Z}$

• $2\cos x-1=0$ signifie $\cos x=\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}$, donc $x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$ ou $x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$

ainsi $\boxed{S_{\mathbb{R}}=\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{3}+k\pi;-\dfrac{\pi}{3}+k\pi;\text{aveck}\in\mathbb{Z}\right\}}$ et par suite $\boxed{S_{]-\pi,\pi]}=\left\{-\dfrac{3\pi}{4};-\dfrac{2\pi}{3};-\dfrac{\pi}{3};-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{3};\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{3\pi}{4}\right\}}$

2- a- $2\sin x\cdot h(x)=2\sin x\cdot 2\cos 2x\cdot\cos x=\underbrace{2\sin x\cdot\cos x}_{\sin 2x}\cdot 2\cos 2x=2\sin 2x\cos 2x=\sin(2\times 2x)=\sin 4x$, ainsi

$\boxed{2\sin x\cdot h(x)=\sin 4x}$ **(3)**

b- • On remplace x par $\dfrac{\pi}{5}$ dans l'égalité **(3)** , on aura $2\sin\dfrac{\pi}{5}\cdot h(\dfrac{\pi}{5})=\sin\dfrac{4\pi}{5}$, Or $\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{4\pi}{5}=\pi$, donc $\sin\dfrac{4\pi}{5}=\sin\dfrac{\pi}{5}$

et par suite $2\sin\dfrac{\pi}{5}\cdot h(\dfrac{\pi}{5})=\sin\dfrac{\pi}{5}$, puisque $\sin\dfrac{\pi}{5}\neq 0$, on aura $\boxed{h(\dfrac{\pi}{5})=\dfrac{1}{2}}$

• On remplace x par $\dfrac{\pi}{5}$ dans l'égalité **(2)** , on aura : $h(\dfrac{\pi}{5})=2\cos\dfrac{2\pi}{5}\cdot\cos\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{1}{2}$, Or $\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{4\pi}{5}=\pi$ donc

$\cos\dfrac{2\pi}{5}=-\cos\dfrac{3\pi}{5}$, et par suite $-2\cos\dfrac{3\pi}{5}\cdot\cos\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{1}{2}$, donc $\boxed{\cos\dfrac{\pi}{5}\cdot\cos\dfrac{3\pi}{5}=-\dfrac{1}{4}}$

3- $h(x)=\cos x+\cos 3x$, On remplace x par $\frac{\pi}{5}$ on aura $h(\frac{\pi}{5})=\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{1}{2}$

ainsi $\begin{cases}\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{1}{2}=S\\ \cos\frac{\pi}{5}\times\cos\frac{3\pi}{5}=-\frac{1}{4}=P\end{cases}$, $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{3\pi}{5}$ sont alors solutions de l'équation $x^2-Sx+P=0$

$x^2-Sx+P=0$ signifie $x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}=0$. $\Delta=\frac{5}{4}$, d'où : $x'=\frac{1-\sqrt{5}}{4}\prec 0$ et $x''=\frac{1+\sqrt{5}}{4}\succ 0$

$\frac{\pi}{5}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $\frac{3\pi}{5}\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ donc $\cos\frac{\pi}{5}\succ 0$ et $\cos\frac{3\pi}{5}\prec 0$ ainsi : $\boxed{\cos(\frac{\pi}{5})=\frac{1+\sqrt{5}}{4}}$ et $\boxed{\cos(\frac{3\pi}{5})=\frac{1-\sqrt{5}}{4}}$

EXERCICE 3: RÉPONSES

1- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2+x-1}{x-1}=f(0)=1$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{1}=1$, et par suite f est continue en 0.

2- a- $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{x^2+x-1}{x-1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2+x-1-x+1}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{(x-1)}=0$

d'où f est derivable a droite de 0 et $f_d{}'(0)=0$: $\mathscr{C}_f$ admet une demi tangente horizontale a droite en 0

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{(\sqrt{x^2+x+1}-1)\times(\sqrt{x^2+x+1}+1)}{x(\sqrt{x^2+x+1}+1)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^2+x+1-1}{x(\sqrt{x^2+x+1}+1)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^2+x}{x(\sqrt{x^2+x+1}+1)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x+1}{(\sqrt{x^2+x+1}+1)}=\frac{1}{2}$

d'où f est dérivable a gauche en 0 et $f_g{}'(0)=\frac{1}{2}$

conclusion $f_d{}'(0)\neq f_g{}'(0)$,donc f n'est pas dérivable en 0, $\mathscr{C}_f$ admet deux demi tangente au point d'abscisse 0

b- f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty,0]$, $[0,1[$ et $]1,+\infty]$

3- • Si $x\in[0,+\infty[\setminus\{1\}$, $f'(x)=\frac{(2x+1)(x-1)-(x^2+x-1)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ • Si $x\in]-\infty,0]$, $f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

ainsi $\boxed{\begin{cases}f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2} & \text{si } x\in[0,+\infty[\setminus\{1\}\\ f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} & \text{si } x\in]-\infty,0]\end{cases}}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	1	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

4- $T:y=f'(-1)(x+1)+f(-1)=-\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}x$, $\boxed{T:y=-\frac{1}{2}x}$

5-• $\Delta:y=x+2$ asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+2)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2+x-1}{x-1}-(x+2)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-1-(x+2)(x-1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-1-(x^2+x-2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0$

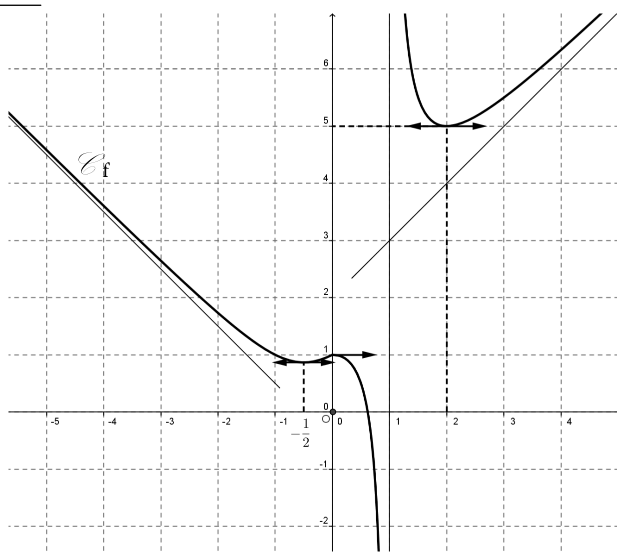
d'où la droite $\Delta:y=x+2$ asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$

• $\Delta:y=-x-\frac{1}{2}$ asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(-x-\frac{1}{2})=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}+(x+\frac{1}{2})$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left[\sqrt{x^2+x+1}+(x+\frac{1}{2})\right]\left[\sqrt{x^2+x+1}-(x+\frac{1}{2})\right]}{\left[\sqrt{x^2+x+1}-(x+\frac{1}{2})\right]}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1-(x^2+x+\frac{1}{4})}{\left[\sqrt{x^2+x+1}-(x+\frac{1}{2})\right]}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{3}{4}}{\underbrace{\left[\sqrt{x^2+x+1}-(x+\frac{1}{2})\right]}_{\xrightarrow{x\to-\infty}+\infty}}=0$



Courbe représentative de f